Metod reprezentacije determinante u vidu sume determinanti

Ovaj metod se sastoji u razlaganju det. na sumu det. koje lakše možemo izračunati.

*) Izračunati det. $(n \in N)$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

Rj: $n=1$

$D = a_1+b_1$

$n=2$, $D = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = (a_1+b_1)(a_2+b_2)-(a_1+b_2)(a_2+b_1)$

$$= \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 \\ a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 \\ b_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_1 \\ a_2 & a_2 \end{vmatrix}}_{0} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_1 & a_2 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}_{0} =$$

$$= a_1 b_2 - a_2 b_2 + b_1 a_2 - b_1 a_1 = (a_1 - a_2)(b_2 - b_1)$$

$n > 2$

$$D_n = \begin{vmatrix} a_1+b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2+b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n+b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & & & \\ a_n & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_1 & a_1+b_2 & \dots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2+b_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & a_n+b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} a_1 & a_1 & \dots & a_1+b_n \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2+b_n \\ \vdots & & & \\ a_n & a_n & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix}}_{0} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 & \dots & a_1+b_n \\ a_2 & b_2 & & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_n & b_2 & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} b_1 & a_1 & \dots & a_1+b_n \\ b_1 & a_2 & & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \\ b_1 & a_n & \dots & a_n+b_n \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 & \dots & a_1+b_n \\ b_1 & b_2 & & a_2+b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_1 & b_2 & & a_n+b_n \end{vmatrix}}_{0}$$

Ako nastavimo ovako dalje i razložimo ostale dvije na 4 po trećoj koloni dobićemo zbir det. koje imaju po dvije proporcionalne kolone pa je vrijednost svake od njih 0. Tj. je D_n, za $n > 2$, jednako 0.

Metod izmjene elemenata det.

Metod izmjene el. det. primjenjuje se onda kada pomoću izmjene nekih elemenata det. dodavanjem ili oduzimanjem istog broja ili transformacije tih det. dovedemo na oblik podesan za računanje. Ako je $D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ a

$$D_n' = \begin{vmatrix} a_{11}+x & \dots & a_{1n}+x \\ & & \\ a_{n1}+x & \dots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$ onda je

$$D_n' = D + x \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}$$ gdje su A_{ij} kofaktori el. det. D.

Ovaj rezultat dobijamo tako što det. D razlažemo na sumu dvije det. po prvoj koloni pa te dvije det. razlažemo na sumu po drugoj koloni, pa po trećoj itd.
Det. koje u dvije ili više kolona imaju x a pojavile su se, su jednake 0. Odatle slijedi da je $D_n' = D + \sum C_{ij}$ gdje su C_{ij} det. koje u samo jednoj koloni imaju x. Ako ove det. razvijemo po toj koloni dobićemo $D_n' = D + x\sum A_{ij}$ pa smo na taj način računanje det. D' sveli na računanje det. D i kofaktora njenih elemenata.

*) Metodom promjene el. det. izračunati:

a)
$$D_n' = \begin{vmatrix} a_1 & x & x & \dots & x \\ x & a_2 & x & \dots & x \\ x & x & a_3 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

b)
$$D_{n+1}' = \begin{vmatrix} x+1 & x & x & \dots & x \\ x & x+2 & x & & x \\ x & x & x+2^2 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & x & x & \dots & x+2^n \end{vmatrix}$$

a)
$$D_n = \begin{vmatrix} a_1-x & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2-x & a_3-x & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_n-x \end{vmatrix}.$$

$$D_n = \prod_{i=1}^{n}(a_i - x)$$

$A_{ij} = 0$ za $i \neq j$

$A_{ii} = \prod_{j=1}^{n}(a_j - x)$ $j \neq i$ pa je $D_n = \prod_{i=1}^{n}(a_i - x) + x \cdot \sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n}(a_j - x)$

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ x & 0 & 0 & \cdots & 2^n \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdots 2^n = 2^{1+2+\cdots+n} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$A_{ii} = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} 2^j = 2^1 \cdot 2^2 \cdots 2^{i-1} \cdot 2^{i+1} \cdots 2^n = 2^{1+2+\cdots+i-1+i+1+\cdots+n} = \ldots = 2^{\frac{n(n+1)}{2} - i}$$

$$D_{n+1}' = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} + x \sum_{i=1}^{n} 2^{\frac{n(n+1)}{2} - i} =$$

$$= 2^{\frac{n(n+1)}{2}} + x \cdot 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \sum_{i=1}^{n} 2^{-i} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}} \left[1 + x\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\right]$$

*) Broeuhah det.

$$D_n = \begin{vmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ \vdots & & & & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{vmatrix}$$

$$D_n' = \begin{vmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{vmatrix} = (a-b)^n$$

$A_{ij} = 0 \quad i \neq j$

$A_{ii} = (a-b)^{n-1}$

$$D_n' = (a-b)^n + b \sum_{i=1}^{n} (a-b)^{n-1}$$

$$= (a-b)^n + b \cdot n (a-b)^{n-1} =$$

$$= (a-b)^{n-1} (a - b + bn)$$

Množenje determinanti

*) Na sva 4 načina pomnožiti det.

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

i uvjeriti se da je determinanta proizvoda det. jednaka proizvodu determinanti

I način: vrsta sa vrstom

$$D_1 D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -6 & -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$D_1 = 3$
$D_2 = 7$
$D_1 D_2 = 21$

II način: $I_k \cdot I_v (II_v, III_v)$, $II_k \ldots$

$$D_1 D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 1 \\ 9 & 4 & 4 \end{vmatrix}$$

III n. kol. • kol.

$$D_1 D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 4 & 7 & -4 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix}$$

$$D_1 D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 9 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \\ 1 & -8 & 4 \end{vmatrix}$$

*) Izračunati det. rastavljajući ga u vidu proizvoda dvije det.

$$D_n = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \dots & 1+x_1y_n \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 & & 1+x_2y_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 & \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} =$$

$D_1 = 1+x_1y_1, \quad n=1$

$n=2 \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \\ 1+x_2y_1 & 1+x_2y_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} =$

$= (x_2-x_1)(y_2-y_1)$

$n>2$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ 1 & x_3 \\ \vdots & \\ 1 & x_n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & y_1 \\ 1 & y_2 \\ & y_3 \\ & \\ 1 & y_n \end{vmatrix}$$

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 1 & x_n & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & \dots & y_n \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 = 0.$$

*)

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{n-1} & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n & x \\ s_2 & s_3 & s_4 & \cdots & s_{n+1} & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & s_{n+2} & \cdots & s_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} \qquad s_k = x_1^k + x_2^k + \cdots + x_n^k$$

$$= \begin{vmatrix} 1+1+\cdots+1 & x_1+x_2+\cdots+x_n & x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 & \cdots & x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\cdots+x_n^{n-1} & 1 \\ x_1+x_2+\cdots+x_n & x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 & x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3 & \cdots & x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n & x \\ x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2 & x_1^3+x_2^3+\cdots+x_n^3 & x_1^4+x_2^4+\cdots+x_n^4 & \cdots & x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+\cdots+x_n^{n+1} & x^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1^n+x_2^n+\cdots+x_n^n & x_1^{n+1}+\cdots+x_n^{n+1} & x_1^{n+2}+\cdots+x_n^{n+2} & \cdots & x_1^{2n-1}+\cdots+x_n^{2n-1} & x^n \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & & x_n & x \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & & x_n^2 & x^2 \\ \vdots & & \vdots & & & \\ x_1^n & x_2^n & x_3^n & & x_n^n & x^n \end{vmatrix}}_{A_{n+1}} \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & & x_2^{n-1} & 0 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & & x_3^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{B_{n+1}} = A_{n+1} B_{n+1}$$

$$A_{n+1} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

$$B_{n+1} = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \\ 1 & x_n & x_n^2 & & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

$$D_{n+1} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i) \cdot \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)^2$$

*) Calculați:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & q & q^2 & q^3 & \cdots & q^{n-1} \\ 1 & q^2 & q^4 & q^6 & \cdots & q^{2(n-1)} \\ 1 & q^3 & q^6 & q^9 & \cdots & q^{3(n-1)} \\ \vdots & & & & & \\ 1 & q^{n-1} & q^{2(n-1)} & q^{3(n-1)} & \cdots & q^{(n-1)^2} \end{vmatrix}$$

$q = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

$D \cdot D =$

$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^{n-1} = \frac{\varepsilon^n - 1}{\varepsilon - 1} = 0$

$$= \begin{vmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & n & 0 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & n & 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & & & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ n & 0 & \cdots & & 0 \end{vmatrix} = n \cdot n^{n-1} (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$D^2 = n^n \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \Rightarrow D = \sqrt{n^n} \cdot i^{\frac{n(n-1)}{2}}$

$$D = \prod_{1\le i<j\le n-1} (\varepsilon^j - \varepsilon^i) = \prod_{1\le i<j\le n-1} (\alpha^{2j} - \alpha^{2i}) = \prod_{1\le i<j\le n-1} \alpha^{j+i} (\alpha^{j-i} - \alpha^{i-j}) =$$

$$\alpha^2 = \varepsilon$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n-1} \alpha^{i+j} \cdot \prod_{1\le i<j\le n-1} (\alpha^{j-i} - \alpha^{-(j-i)}) =$$

$$\alpha = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$$

$$\alpha^{j-i} - \alpha^{-(j-i)} = 2i\sin\frac{(j-i)\pi}{n}$$

$$= \prod_{1\le i<j\le n-1} \alpha^{i+j} \cdot \overbrace{\prod_{1\le i<j\le n-1} 2 i \sin\frac{(j-i)\pi}{n}}^{>0 \;\to\; = \sqrt{n^n}}$$

$$j - i < n$$

$$0 < \frac{(j-i)\pi}{n} < \pi$$

$$D = \beta \cdot n^{\frac{n}{2}} \qquad \beta = i^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \prod_{1\le i<j\le n-1} \alpha^{i+j} = i^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot \alpha^{\frac{n(n-1)^2}{2}}$$

$$1 \le i < j \le n-1$$

$$\alpha^{j+i} = \alpha^{\frac{n(n-1)^2}{2}} \qquad \alpha^{\frac{n}{2}} = \varepsilon^{\frac{n}{4}} = \cos\frac{2\pi n}{n\cdot 4} + i\sin\frac{2\pi n}{4n}$$

$$= \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i$$

$$\beta = i^{\frac{n(n-1)}{2}} \cdot i^{(n-1)^2} = i^{\frac{n(n-1)}{2} + (n-1)^2} = i^{\frac{(n-1)(n+2n-2)}{2}} =$$

$$= i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}}$$

$$D = \sqrt{n^n}\; i^{\frac{(n-1)(3n-2)}{2}}$$

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_n & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & & & & \\ a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_1 \end{vmatrix} = f(\varepsilon_1)f(\varepsilon_2)\dots f(\varepsilon_n)$$

gdje je $f(x)=a_1+a_2x+\dots+a_nx^{n-1}$

$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_n$ sve različite vrijednosti n-tog korijena

$$V=\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \varepsilon_1^2 & \dots & \varepsilon_1^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_2^2 & \dots & \varepsilon_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_n & \varepsilon_n^2 & \dots & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$D\cdot V = \cancel{a_1+a_2\varepsilon_1+a_3\varepsilon_1^2+\dots+a_n\varepsilon_1^{n-1}}$

$$=\begin{vmatrix} a_1+a_2\varepsilon_1+\dots+a_n\varepsilon_1^{n-1} & a_n+a_1\varepsilon_1+\dots+a_{n-1}\varepsilon_1^{n-1} & \dots & a_2+a_3\varepsilon_1+\dots+a_1\varepsilon_1^{n-1} \\ a_1+a_2\varepsilon_2+\dots+a_n\varepsilon_2^{n-1} & a_n+a_1\varepsilon_2+\dots+a_{n-1}\varepsilon_2^{n-1} & \dots & a_2+a_3\varepsilon_2+\dots+a_1\varepsilon_2^{n-1} \\ a_1+a_2\varepsilon_3+\dots+a_n\varepsilon_3^{n-1} & a_n+a_1\varepsilon_3+\dots+a_{n-1}\varepsilon_3^{n-1} & \dots & a_2+a_3\varepsilon_3+\dots+a_1\varepsilon_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1+a_2\varepsilon_n+\dots+a_n\varepsilon_n^{n-1} & a_n+a_1\varepsilon_n+\dots+a_{n-1}\varepsilon_n^{n-1} & & a_2+a_3\varepsilon_n+\dots+a_1\varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$a_1+a_2\varepsilon_1+\dots+a_n\varepsilon_1^{n-1}=f(\varepsilon_1)$

$=f(\varepsilon_2)$

$\vdots$

$=f(\varepsilon_n)$

a_{12} ... $= \varepsilon_1 f(\varepsilon_1)$

a_{22} $= \varepsilon_2 f(\varepsilon_2)$

a_{n2} $= \varepsilon_n f(\varepsilon_2)$

a_{1n} $= \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1)$

a_{2n} $= \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_1)$

a_{nn} $= \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n)$

$$= \begin{vmatrix} f(\varepsilon_1) & \varepsilon_1 f(\varepsilon_1) & \dots & \varepsilon_1^{n-1} f(\varepsilon_1) \\ f(\varepsilon_2) & \varepsilon_2 f(\varepsilon_2) & & \varepsilon_2^{n-1} f(\varepsilon_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f(\varepsilon_n) & \varepsilon_n f(\varepsilon_n) & & \varepsilon_n^{n-1} f(\varepsilon_n) \end{vmatrix} = f(\varepsilon_1) \cdots f(\varepsilon_n) \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon_1 & \dots & \varepsilon_1^{n-1} \\ 1 & \varepsilon_2 & & \varepsilon_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \varepsilon_n & & \varepsilon_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= f(\varepsilon_1) \cdots f(\varepsilon_n) \cdot V$$

$$D \cdot V = f(\varepsilon_1) \cdots f(\varepsilon_n) \cdot V \Rightarrow D = f(\varepsilon_1) \cdots f(\varepsilon_n)$$

18. 03. '04.

Sistemi linearnih jednačina

* Naći partikularno i opšte rj. sist. jed.

$$
\begin{aligned}
2x - 3y + 6z + 2v - 8w &= 3\\
y - 4z + v \quad &= 1\\
v - 3w &= 2
\end{aligned}
$$

Rj.:

$5 - 3 = 2 \Rightarrow$ 2 slobodne promjenljive

x, y, v — vezane

z, w — slobodne

stavimo $z = a$

$w = b$

$v = 2 + 3b$

$y - 4a + 2 + 3b = 1$

$y = 4a - 3b - 1$

$2x - 3 \cdot (4a - 3b - 1) + 6a + 2 \cdot (2 + 3b) - 8b = 3$

$2x - 6a + 10b + 7 = 3$

$x = \frac{6a - 10b - 4}{2} = 3a - 5b - 2$

Opšte rj. sist. je $(3a - 5b - 2,\ 4a - 3b - 1,\ a,\ 2 + 3b,\ b)$

gdje su a i b parametri iz R

Partikularno rj. $(-9, -3, 1, 8, 2)$

a)
$$x+2y-3z=-1$$
$$3x-y+2z=7$$
$$5x+3y-4z=2$$

b)
$$2x+y-2z=10$$
$$3x+2y+2z=1$$
$$5x+4y+3z=4$$

c)
$$x+2y-3z=6$$
$$2x-y+4z=2$$
$$4x+3y-3z=14$$

R:

a)
$$x+2y-3z=-1$$
$$3x-y+2z=7$$
$$2x+3y-4z=2$$

$$x+2y-3z=-1$$
$$-7y+11z=10$$
$$\cancel{-y}+2z=4$$

$$x+2y-3z=-1 \Rightarrow x+16-18=-1 \Rightarrow x=1$$
$$-7y+11z=10 \Rightarrow -7y=-56 \Rightarrow y=8$$
$$-3z=-18 \Rightarrow z=6$$

Utreba biti prov

b)
$$2x+y-2z=10 \quad /3 \quad /5$$
$$3x+2y+2z=1 \quad /-2$$
$$5x+4y+3z=4 \quad /-2$$

$$2x+y-2z=10$$
$$-y-10z=28 \quad /-3$$
$$-3y+16z=42$$

$$2x+y-2z=10 \Rightarrow 2x+2+6=10 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$$
$$-y-10z=28 \Rightarrow y=2$$
$$14z=-42 \Rightarrow z=-3$$

Kramerova metoda

$2x + 3y = 5$
$\alpha x + 7y = 4$

$D = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ \alpha & 7 \end{vmatrix} = 4 - 3\alpha$

$D_x = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 5 - 2 = 3$

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ \alpha & 4 \end{vmatrix} = 8 - 5\alpha$

$x = \frac{D_x}{D} = D_x \cdot D^{-1}$

·	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8
3	0	3	6	9	2	5	8	1	4	7
4	0	4	8	2	6	0	4	8	2	6
5	0	5	0	5	0	5	0	5	0	5
6	0	6	2	8	4	0	6	2	8	4
7	0	7	4	1	8	5	2	9	6	3
8	0	8	6	4	2	0	8	6	4	2
9	0	9	8	7	6	5	4	3	2	1

$1^{-1} = 1$
$3^{-1} = 7$
$7^{-1} = 3$
$9^{-1} = 9$

Invertibilni el. Z_{10} su 1, 3, 7, 9 (relativno prosti sa 10

$D = 1$
$D = 3$
$D = 7$
$D = 9$

$4 - 3\alpha = 1$

$-3\alpha = 1 - 4 \Rightarrow \alpha = 1$

$\underline{\alpha = 1}$

$D_x = 3 \quad D_y = 3$

$x = D_x \cdot D^{-1} = 3$ $\qquad (3,3)$

$y = D_y D^{-1} = 3$

$\underline{D = 3}$

$4 - 3\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = 7$

$D_x = 3$

$D_y = 3$ $\qquad = 7$

$x = D_x \cdot D^{-1} = 3 \cdot 7 = 1$ $\qquad (1,1)$

$y = D_y \cdot D^{-1} = 3 \cdot 7 = 1$

$\underline{D = 7}$

$4 - 3\alpha = 7 \Rightarrow -3\alpha = 3 \Rightarrow \alpha = -1 \Rightarrow \alpha = 9$

$D_x = 3$

$D_y = 3$ $\qquad D^{-1} = 3$

$x = 3 \cdot 3 = 9$ $\qquad (9,9)$

$y = 3 \cdot 3 = 9$

$\underline{D = 9}$

$4 - 3\alpha = 9 \Rightarrow -3\alpha = 5$

$3\alpha = -5 \Rightarrow 3\alpha = 5 \Rightarrow \alpha = 5$

$D_x = 3$ $\qquad \boxed{D^{-1} = 9}$ $\qquad (7,7)$

$D_y = 3$

$x = 7$

$y = 7$

... $x = 1, 5, 7, 9$

U suprotnom D nije invertibilno
$D_x = 3 \neq 0 \Rightarrow$ sist. nema rj.

* U sistemu $\mathbb{Z}_{12}$ rješiti i disk. sist.

$3x + 2y = 7$
$x + py = 5$

Rj.
$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & p \end{vmatrix} = 3p - 2$

$D_x = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 5 & p \end{vmatrix} = 7p - 10 = 7p + 2$

$D_y = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 7 = 8$

$D \in \{1, 5, 7, 11\}$

$D = 1$

$3p - 2 = 1$
$3p = 3$
$\boxed{p = 1}$

$X = 9 \cdot 1 = 9$ $\quad (9, 8)$
$y = 8$

$D_x = 9$
$D_y = 8$

$D=5$

$3\beta - 2 = 5$

$3\beta = 7$

$\beta = \cancel{\ }$ nema rj.

$D = 7$

$3\beta - 2 = 7$

$3\beta = 9$

$\beta_1 = 3, \quad \beta_2 = 7, \quad \beta_3 = 11$

$D_{x_1} =$ [illegible]	$D_x = 3$	$D_x = 7$
$D_{y_1} = 8$	$D_y = 8$	$D_y = 8$
$D^{-1} = 7$	$D^{-1} =$	$D^{-1} =$
$x = 8$	$x = 9$	$x = 1$
$y = 8$	$y = 8$	$y = 8$
$(7,8)$	$(9,8)$	$(1,8)$

$D = 11$

~~protivr.~~ $3\beta = 1$ nemoguće

Sist. ima rj. za $\beta = 1, 3, 7, 11$ a za ostale protivr.

$$x+y-z=1$$
$$2x+3y+az=3$$
$$x+ay+3z=2$$

po x, y, z
a) nema rj.
b) ima više od 1 rj.
c) ima 1 rj.

$$x+y-z=1$$
$$y+(a+2)z=1$$
$$(a-1)y+4z=1$$

D =

$$x+y-z=1$$
$$y+(a+2)z=1$$
$$(a+3)(2-a)=-a+2$$

za $(a+3)(2-a)\neq 0$ tj. $a\neq -3,\ a\neq 2$

sist. ima jed. rj.

za $a=-3$ sist. nema rj.

$a=2$ $0\cdot 0=0$ sistem ima beskon. rj.

$$\left.\begin{aligned} x+y-z&=1 \\ y+4z&=1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} z&=\alpha \\ y&=1-4\alpha \\ x&=5\alpha \end{aligned}$$

$(5\alpha, 1-4\alpha, \alpha)$

$\alpha\in R$

x) Rješiti sist.

$$(m+1)x+y+z=2-m$$
$$x+(m+1)y+z=-2$$
$$x+y+(m+1)z=m$$

$m\in R$

~~$(m+1)x+y+z=2-m$~~

$$D = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ 1 & m+1 & 1 \\ 1 & 1 & m+1 \end{vmatrix} = (m+1)^3 + 2 - (m+1) - (m+1) - (m+1) =$$

$$= (m+1)\left((m^2+2m+1) - 3\right) + 2 - 2$$

$$= (m+1)(m^2+2m-2) + 2 - 2 = \dots =$$

$$= m^2(m+3)$$

$$D_x = \begin{vmatrix} 2-m & 1 & 1 \\ -2 & m+1 & 1 \\ m & 1 & m+1 \end{vmatrix} = m(2-m)(m+3)$$

$$D_y = \begin{vmatrix} m+1 & 2-m & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & m & m+1 \end{vmatrix} = -2m(m+3)$$

$$D_z = \begin{vmatrix} m+1 & 1 & 2-m \\ 1 & m+1 & -2 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^2(m+3)$$

$D \neq 0$ za $m \neq 0$, $m \neq -3$

Onda je

$$x = \frac{2-m}{m}, \quad y = \frac{-2}{m}, \quad z = 1$$

$D = 0$, za $m = 0 \vee m = -3$

$\Rightarrow D_x = D_y = D_z = 0$

sistem ima besk. mnogo rj.

$x + y - z + 2u = 0 \quad /\cdot(-2) /\cdot(-1)$
$x + 9y + 3z + \ldots \quad /\cdot(-4)$
$2x + y + z + 5u = 0$

$x + 10y - 6z + u = 0$

$4x + (2\lambda - 1)y + (\lambda - 2)z + 9u = 0$

(Za razne vrij. par. λ odrediti njednu bazu i dim. podprost. $S \subset \mathbb{R}^4$ koji je gen. rj. ovakvog sust.)

$\lambda \in \mathbb{R}$

$x + y - z + 2u = 0$
$-y + 3z + u = 0 \quad /\cdot(-9)$
$9y - 5z - u = 0$
$(2\lambda - 5)y + (\lambda - 6)z - 11u = 0$

$x + y - z + 2u = 0$
$-y + 3z + u = 0$
$22z + 8u = 0$
$(7\lambda - 13)z + (2\lambda - 4)u = 0$

$\Rightarrow$

$x + y - z + 2u = 0$
$-y + 3z + u = 0$
$z + \frac{8}{22}u = 0$

$\frac{-6\lambda + 8}{11}u = 0 \Rightarrow$ Ako je $-6\lambda + 8 \neq 0$
$\left(\lambda \neq \frac{4}{3}\right)$

$\Rightarrow u = 0$
$z = 0$
$y = 0$
$x = 0$

Tada je rj. sist. $(0,0,0,0)$ trivijalno pa je prostor S trivijalan za $\lambda = \frac{4}{3}$ onda je $0 = 0$

$$\left.\begin{array}{l} 22z + 8u = 0 \\ -y + 3z + u = 0 \\ x + y - z + 2u = 0 \end{array}\right\}$$ 1 slobodna prom.; Dim $S_1 = 1$

$u = 11$
$z = -4$
$y = -1$
$x = 25$

$\underbrace{(25, -1, -4, 11)}_{\text{baza pr. } S}$

*) Teorem: Sistem jed. sa n nepozn. je moguć tj. ima rj. akko je rang A = rang (A\B)
Isti takav, ali homogen sistem ima netrivijalna rj. akko je rang A < n

*) Uvaženje matrice i proširene matr. sist. riješiti sist. jednačina

a)
$$\begin{aligned} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 &= 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 - 8x_3 &= 8 \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 &= 9 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 7 \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 &= 12 \end{aligned}$$

a)
$$A\backslash B = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & 24 & 7 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Rang } A = 2 \\ \text{rang } A\backslash B = 3 \end{array}\right\}$$ sist. nema rj.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & -3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & -17 & 23 & -23 \\ 0 & 7 & 11 & -9 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & 17 & 23 & -23 \\ 0 & 1 & 9 & -17 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 9 & -17 \\ 0 & 0 & -26 & 55 \\ 0 & 0 & 176 & -312 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 5 & -8 & 8 \\ 0 & 1 & 9 & -17 \\ 0 & 0 & -26 & 55 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{rang } A = 3 \\ \text{rang } A|B = 4 \end{array}\right\} \text{sist. nu e r.j.}$$

08.04.04.

Ispit par dana prije

* Naći bazu, dimenziju sume i presjeka podprostora U i W vekt. podprostora V ako je U generisan vekt. $f_1 = (1, 2, -1, -2)$

$f_2 = (3, 1, 1, 1)$

$f_3 = (-1, 0, 1, -1)$

a W generisan vektorima $g_1 = (2, 5, -6, -5)$
$g_2 = (-1, 2, -7, -3)$
$g_3 = (0, 9, -20, -11)$

Rj:

$U, W \subseteq V = \mathbb{R}^4$ $\quad \mathbb{R}$

$\dim V = 4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -5 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$\dim U = 3$ $\quad$ baza $\{ \overset{f_1'}{(1, 2, -1, -2)}, \overset{f_2'}{(0, -1, 4, 1)}, \overset{f_3'}{(0, 0, 8, -1)} \}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 & -5 \\ -1 & 2 & -7 & -3 \\ 0 & 9 & -20 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -7 & -3 \\ 0 & 9 & -20 & -11 \\ 0 & 9 & -20 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 2 & -7 & -3 \\ 0 & 9 & -20 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\dim W = 2$ $\quad$ baza $\{ \overset{g_1'}{(-1, 2, -7, -3)}, \overset{g_2'}{(0, 9, -20, -11)} \}$

$U + W = \{f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3\} = \{f_1', f_2', f_3', g_1', g_2'\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ -1 & 2 & -7 & -3 \\ 0 & 9 & -20 & -11 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 4 & -8 & -5 \\ 0 & 9 & -20 & -11 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \dim U+W = 3$$

baza $U+W = \{(1,2,-1,-2),(0,-1,4,1),(0,0,8,-1)\}$

$\dim U \cap W = \dim(U) + \dim W - \dim(U+W) = 3+2-3 = 2$

baza

$h_1 \in U \quad h_1 \in W$

$h_1 = \alpha f_1' + \beta f_2' + \gamma f_3'$

$h_1 = \delta g_1' + \varepsilon g_2'$

$\alpha(1,2,-1,-2) + \beta(0,-1,4,1) + \gamma(0,0,8,-1) = \delta(-1,2,-7,-3)$
$+ \varepsilon(0,9,-20,-11)$

$(\alpha, 2\alpha-\beta, -\alpha+4\beta+8\gamma, -2\alpha+\beta-\gamma) = (-\delta, 2\delta+9\varepsilon, -7\delta-20\varepsilon, -3\delta-11\varepsilon)$

$\alpha = -\delta$
$2\alpha-\beta = 2\delta+9\varepsilon$
$-\alpha+4\beta+8\gamma = -7\delta-20\varepsilon$
$-2\alpha+\beta-\gamma = -3\delta-11\varepsilon$

$\Rightarrow -2\delta-\beta = 2\delta+9\varepsilon$
$\delta+4\beta+8\gamma = -7\delta-20\varepsilon$
$2\delta+\beta-\gamma = -3\delta-11\varepsilon$

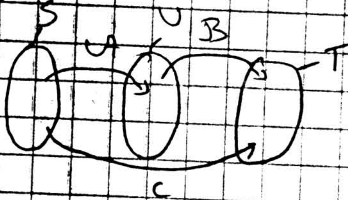
$-\beta = 4\delta+9\varepsilon$
$4\beta+8\gamma = -8\delta-20\varepsilon$
$\beta-\gamma = -5\delta-11\varepsilon$

$\alpha = -\delta$
$\beta = -4\delta-9\varepsilon$
$\gamma = \delta+2\varepsilon$
δ → proizvoljno
ε

Pa je baza $\{(-1,2,-7,-3),(0,5,-20,-1)\}$

* Neka su S, U i T v.p. nad istim poljem K
i neka su $A: S \to U$, i $C: S \to T$ lin. op.
Pod kojim ok uslovima postojati lin. op.
$B: U \to T$ tako da je $C = B \circ A$

~~R:~~



Pretp. $\exists\, B: U \to T \mid C = B \circ A$

To znači $\forall x \in S$

$C(x) = B(A(x))$. Ako je $A(x) = 0$

to znači $x \in Ker(A)$

Pošto je B lin. pred. $\Rightarrow \overset{C(x)}{\overset{\|}{B(A(x))}} = B(0) = 0$

Iz $A(x) = 0 \Rightarrow C(x) = 0$ što znači $Ker(A) \subseteq Ker(C)$

Pretp. $Ker(A) \subseteq Ker(C)$

$C = B \circ A$

$B(x) = C(y) \quad A(y) = x \quad x \in Im(A)$

Ako $x \notin Im(A) \quad B(x) = 0$

$B: U \to T$

$x_1 = x_2 \in Im(A) \Rightarrow \exists\, y_1$ i $y_2 \in S: A(y_1) = x_1$ i $A(y_2) = x_2$

$\Rightarrow A(y_1) - A(y_2) = 0 \Rightarrow A(y_1 - y_2) = 0 \Rightarrow y_1 - y_2 \in Ker(A)$

$\in Ker(C) \Rightarrow C(\ldots$

$\boxed{Ker(A) \subseteq Ker(C)}$ potreban i dovoljan uslov.

* Neka je X v.p. nad R koga čine polinomi st. ≤ 3 sa realnim koef. a Y v.p. nad R koga čine matrice oblika $\begin{bmatrix} a & a & b \\ a & b & a \\ b & a & a \end{bmatrix}$ $(a, b \in R)$

Neka biline. funkc. $\phi : X \times Y \to R$ u odnosu na bazu $(1, x, x+x^2)$ prostora X i bazu $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ prostora Y ima matricu

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Naći $\phi\left((x-1)^2, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right)$

b) Naći matricu biline. funkc. ϕ u odnosu na baze $(1, -x, x^2)$ prost. X i baze $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ prostora Y

c) Ispitati da li je ϕ nedegen. u odnosu na X i Y

P_1:

a) $(x-1)^2 = \underbrace{x^2 + 1}_{x_3} - 2x = (0, -2, 1)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$$

$$\Phi\left((x-1)^2, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = [0, -2, 1] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 7 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} =$$

$$= [-2, -5] \begin{bmatrix} 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} = -2 - 5/2 = -\frac{9}{2}$$

b)

$\{\underset{f_1}{1}, \underset{f_2}{-x}, \underset{f_3}{x^2}\}$

$f_1 = e_1$

$f_2 = -e_2$

$f_3 = e_3 - e_1$

P matrica prelaza za baze $(1, x, 1+x^2)$ na bazu $(1, -x, x^2)$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A' = P^T A Q$

$$\mathrm{Ker}\,\Phi = \left\{ y_1, y_2 \in Y : [x_1, x_2, x_3] \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \forall x_1, x_2, x_3 \right\} =$$

$$= \{ y_1, y_2 \in Y : 2y_1 = 0,\ y_1 + 4y_2 = 0,\ 3y_2 = 0 \quad \forall x_1, x_2, x_3 \} =$$

$= \{0_Y\} \Rightarrow \Phi$ je nedeg. u odnosu na Y

$$Y^{\perp} = \{ x \in X : \Phi(x, y) = 0 \quad \forall y \in Y \} =$$

$$= \left\{ [x_1, x_2, x_3] \in X : [x_1, x_2, x_3] \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \forall [y_1, y_2] \in Y \right\} =$$

$$= \{ [x_1, x_2, x_3] \in X : 2x_1 + x_2 = 0,\ 4x_2 + 3x_3 = 0 \} =$$

$$= \{ [x_1, x_2, x_3] \in X : 2x_1 = -x_2,\ 3x_3 = -4x_2 \} = [-2, 1, -4/3]$$

za $x_2 = 1$

$\Rightarrow \Phi$ je degener. u odnosu na X.

* Neka je V vekt. prostor nad poljem K i A, $B \in \mathrm{End}(V)$

Ako je $\mathrm{Im}(A) \oplus \mathrm{Im}(B) = \mathrm{Ker}(A) \oplus \mathrm{Ker}(B) = V$

dok. da je $\mathrm{rang}(A) + \mathrm{rang}(B) = \mathrm{rang}(A + B)$

$\dim(V) = \mathrm{rang}(A + B) + \mathrm{def}(A + B)$ (*)

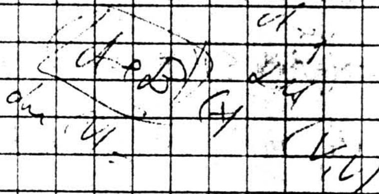
$\mathrm{def}(A + B) = \dim(\mathrm{Ker}(A + B))$

Neka je $x \in \mathrm{Ker}(A + B)$

$(A + B)(x) = 0$

$A(x) = -B(x) \in \mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Im}(B) = \{0\}$

$Im(A) \cap Im(B) = \{0_V\}$



$A(x) = -B(x) = 0_V$

$x \in Ker(A) \cap Ker(B)$

$V = Ker(A) \oplus Ker(B) \Rightarrow Ker(A) \cap Ker(B) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{x = 0}}$

$Ker(A+B) = \{0_V\}$

$\dim(Ker(A+B)) = 0$

$def(A+B) = 0 \Rightarrow$

$(*) \Rightarrow \dim(V) = rang(A+B) \le rang(A) + rang(B) \le \dim(V)$

$\Rightarrow rang(A+B) = rang(A) + rang(B)$

*) Neka su A i B realne ortog. matrice neparnog reda n. Dok. da je bar jedna od matrica A + B ili A - B singularna.

*) Neka je X unitarni prostor a $x_1, \dots, x_n \in X$ vektori. Ako je Γ gramova det. vektora $x_1, \dots, x_n$. Dok. da je $\Gamma = 0$ akko su vektori $x_1, \dots, x_n$ lin. zavisni!

*) Neka je S sim. op. na unitarnom n-dimenzionalnom prostoru V. Dokazati: a) $S + iE$ i $S - iE$ su regul.

operatori ($\mathcal{Y}$ - reg. op., $\mathcal{E}$ - identički op. u V)

b) $\mathcal{U} = (\mathcal{Y} + i\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{Y} - i\mathcal{E})$ unitaran op. čija ni jedna svojstvena vrij. nije jednaka 1.

c) Izraziti $\mathcal{Y}$ preko $\mathcal{U}$

Normirani i unitarni prostori

<u>Def:</u> Neka je X neprazan skup a $d: X \times X \to \mathbb{K}$ preslik. koje svakom ured. paru $(x,y) \in X \times X$ pridružuje realan br. $d(x,y)$. Preslik. d zove se metrička funkcija ili metrika na X ako vrijedi:

1) $d(x,y) \geq 0$ i to $d(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ i obratno

2) $d(x,y) = d(y,x)$ $\forall x, y \in X$

3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $\forall x, y, z \in X$

<u>Def:</u> Neka je X v.p. nad poljem realnih ili kompleksnih br. Preslik. prostora X u $\mathbb{R}$ koje $\forall x \in X$ pridr. realan br. $\|x\|$ zove se norma na X ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:

1) $\|x\| \geq 0$ i to $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $\forall x \in X$

3) $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ $\forall x, y \in X$

Ako je pr X normiran onda je X i metrički prostor sa metrikom $d(x,y) = \|x-y\|$ $\forall x,y \in X$

Def: Za metrički prostor X kaže se da je potpun ili kompletan ako svaki Košijev niz metr. pr. X ima limes u X.

Def: Neka je X realan (kompleksan) normiran prostor. Ako je prostor X kompletan u odnosu na metriku određenu normom onda se X zove Banachov prostor

$*$) Neka je M neprazan podskup Banachovog prostora X i $x_0 \in X$. Broj $\inf_{x \in M} \{\|x\|\}$ nazivamo udaljenost tačke x_0 od skupa M i označavamo se $d(x_0, M)$. Ako je M zatvor. skup i $x_0 \notin M$ dokazati da je $d(x_0, M) > 0$

Rj: pretp. suprotno tj. $d(x_0, M) = 0$

$\inf_{x \in M} \{\|x - x_0\|\} = 0$ To znači $\forall n \in N$ $\exists x_n \in M : \|x - x_n\| < \frac{1}{n}$

Dobijamo niz $\{x_n\} : x_n \in M$ $\forall n \in N$ i $x_n \to x_0$ kad $n \to \infty$

To znači x_n - konverg. $\Rightarrow \lim x_n \in M \Rightarrow x_0 \in M$. što je kontradikc. sa pretp. Dakle $d > 0$

Dokazati da $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ vekt. $x_\varepsilon \in X$ tako da je:

$\|x_\varepsilon\| = 1$ i $d(x_\varepsilon, X_1) \geq 1 - \varepsilon$

D/

$X_1 \neq X \Rightarrow X_1 \subsetneq X \Rightarrow \exists x_0 \in X : d(x_0, X_1) = d > 0$

$d(x_0, X_1) = \inf_{x \in X_1} \{\|x_0 - x\|\}$

$\exists \{x_n\}$ $x_n \in X_1$

$d(x_0, x_n) \to d$, $n \to \infty$

$d(x_0, x_n) = d_n$

$d_n \to d$, $n \to \infty$

$\underline{d_n > 0 \quad \forall n \geq \bar{n}}$

$d_n > 0 \quad \forall n$

$y_n = \frac{1}{d_n}(x_0 - x_n)$

$\|y_n\| = \|\frac{1}{d_n}(x_0 - x_n)\| = \frac{1}{d_n}\|x_0 - x_n\| = 1$

$\{y_n\}$ $y_n \in X$ $\|y_n\| = 1$

$\inf_{x \in X_1}\|y_n - x\| = \inf_{x \in X_1}\|\frac{1}{d_n}(x_0 - x_n) - x\| = \frac{1}{d_n}\inf_{x \in X_1}\|x_0 - x_n - d_n x\| =$

$= \frac{1}{d_n}\inf_{x \in X_1}\|x_0 - \underbrace{(x_n + d_n x)}_{\in X_1}\| \geq \frac{1}{d_n}\inf_{y \in X_1}\|x_0 - y\| = \frac{d}{d_n} \to 1$ kad $n \to \infty$

$\varepsilon > 0$
$0 < \varepsilon < 1$ $\Rightarrow$ $\exists y_\varepsilon \in X$: $d(y_\varepsilon, X_1) \geq 1 - \varepsilon$ i

$\|y_\varepsilon\| = 1$

postoje ograničeni skupovi koji nisu kompaktni

Rj.

Neka je X vam. prostor konačne dim.

Neka je $x_1 \in X$ takav da je $\|x_1\| = 1$ (vekt.)

$L_1 = \{x \in X : x = \lambda x_1, \lambda \in K\}$

L_1 je podprostor prostora X kao takav, on je i zatvoren podpr. pr. X.

Prema preth. zad. zaključujemo $\exists x_2 \in X \setminus L_1$ tako da

$\|x_2\| = 1$ i $d(x_2, L_1) \geq 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\|x_2 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$

$L_2 = \{\alpha x_1 + \beta x_2 : \alpha, \beta \in K\}$

L_2 - podpr. pr. X i dim = V

$X \setminus L_2 \neq \emptyset$

$\exists x_3 \in X \setminus L_2 : \|x_3\| = 1$ i $d(x_3, L_2) > 1 - \frac{1}{2}$

To znači $\|x_3 - x_1\| \geq \frac{1}{2}$ i $\|x_3 - x_2\| \geq \frac{1}{2}$

$L_3 = \{\alpha x_1 + \beta x_2 + \gamma x_3 : \alpha, \beta, \gamma \in K\}$

$\exists x_4 \in X \setminus L_3 : \|x_4\| = 1$ ...

Ako nastavimo ovako dalje, pošto je X besk. dim. prostor

dolazimo do niza $\{x_n\}$ $x_n \in X : \|x_n\| = 1$ $\forall n$ i

Na ovaj način smo dobili niz $\{x_n\}$ koji je

ograničen iz kojeg se ne može izdvojiti konverg.

podniz što znači da X nije kompaktan skup

15. 04. '04.

Def. : Za linearan operator $A: X \to Y$ gdje su X, Y

banahovi prostori, kažemo da je neprekidan u

tački x_0 iz domena od A tj. $x_0 \in D(A)$ ako $x_n \to x_0$

kad $n \to \infty$ slijedi da $A(x_n) \to A(x_0)$ kad $n \to \infty$.

Drugim riječima $\|x_n - x_0\|_X \to 0$ kad $n \to \infty$ tada

$\|A(x_n) - A(x_0)\|_Y \to 0$ kad $n \to \infty$.

Ako je operator A neprekidan u svakoj tački domena

onda kažemo da je on neprekidan operator.

*) Ako je lin. op. A neprekidan u jednoj tački $x_0 \in D(A)$

onda je on neprekidan.

Rj:

Neka je $A: X \to Y$ i neka je neprekidan u x_0. To znači

ako imamo niz vektora $\{x_n\} \subseteq X$ i $x_n \to x_0$ tada $A(x_n) \to A(x_0)$

kada $n \to \infty$. Pretp. da imamo neki niz vektora $\{y_n\}$ $\in$

isto tako iz X ti. $\{y_n\} \subset X$ i $y_n \to y_0$ kad $n \to \infty$.

Odavde imamo da $x_n - x_0 \to 0$ kad $n \to \infty$

Kako da pokažemo da $A(y_n) \to A(y_0)$ kad $n \to \infty$?

Imamo $y_n - y_0 \to 0$ kad $n \to \infty$. Dalje imamo $(y_n - y_0) + x_0 \to x_0$ kad $n \to \infty$.

Ako stavimo da je $x_n = y_n - y_0 + x_0$, imamo da $x_n \to x_0$ kad $n \to \infty$

Imamo $A(y_n - y_0 + x_0) \to A(x_0)$ kad $n \to \infty$. Pošto je A linearan, to imamo $A(y_n) - A(y_0) + \cancel{A(x_0)} \to \cancel{A(x_0)}$ kad $n \to \infty$.

To znači da $A(y_n) \to A(y_0)$ kad $n \to \infty$ što znači da je operator A neprekidan u y_0, a kako je to bila proizvoljna tačka iz $D(A)$ (domen od A), to znači da je A neprekidan na cijelom domenu.

*) Dokazati da je linearan operator neprekidan akko je ograničen.

Rj: $\Rightarrow$:

Najprije pretp. da je op. A ograničen op. Uzmimo niz $\{x_n\}$ el. iz X koji konvergiraju ka x_0 kad $n \to \infty$ tj. $x_n \to x_0$ kad $n \to \infty$. To znači da $x_n - x_0 \to 0$ kad $n \to \infty$ tj. $\|x_n - x_0\|_X \to 0$ kad $n \to \infty$. Sada posmatramo:

$$\|A(x_n) - A(x_0)\|_Y \le \|A(x_n - x_0)\| \le \underbrace{\|A\|}_{\text{ograničen}} \underbrace{\|x_n - x_0\|_X}_{\to 0} \to 0 \quad \text{kad } n \to \infty$$

To znači da $A(x_n) - A(x_0) \to 0$ kad $n \to \infty$.

To znači da je A neprekidan u $x_0 \in X$.

i treba da je ogr. ⇔ neprek. i pokazati da je ograničen

Pretpostavimo, tj. da operator A nije ograničen. To znači da možemo formirati niz vektora x_n takvih da je $\|A(x_n)\| > n\|x_n\|$ $\forall n \in N$, i možemo pronaći jedan takav vektor.

Def.: Za ...

Def. niz vektora $\{y_n\}$ tako da je $y_n = \frac{1}{n\|x_n\|} x_n$ s tim da je $x_n \neq 0$, što slijedi iz odabira vektora x_n. To znači da je $\|y_n\| = \|\frac{1}{n\|x_n\|} x_n\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|x_n\| = \frac{1}{n}$

svaki vektor $\|y_n\| \to 0$ kad $n \to \infty$. Prema tome ovaj niz $\{y_n\}$ je konverg. tj. $y_n \to 0$ kad $n \to \infty$, a naš operator A je po pretp. neprekidan, što znači da $A(y_n) \to 0$ kad $n \to \infty$. To znači da $\|A(y_n)\| \to 0$ kad $n \to \infty$ tj. može se po volji umanjiti vala kad $n \to \infty$.

Dalje imamo $\|A(y_n)\| = \|A(\frac{1}{n\|x_n\|} x_n)\| = \|\frac{1}{n\|x_n\|} A(x_n)\| = \frac{1}{n\|x_n\|}\|A(x_n)\|$ $> \frac{1}{n\|x_n\|} n\|x_n\| = 1$. Sa jedne str. imamo $A(y_n) \to 0$ kad $n \to \infty$ što je nemoguće. Dakle operator A je ograničen.

*) Neka je $\mathcal{L}(X,Y)$ prostor svih ograničenih operatora koji djeluju sa X u Y. Tada je $\mathcal{L}(X,Y)$ normiran prostor sa normom koja je def. ovako

$A \to \|A\|$

(*) $\|A\| = \sup\limits_{x \in X \setminus \{0\}} \frac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} = \sup\limits_{x \in X,\ \|x\| = 1} \|A(x)\|_Y$

Rj: Najprije trebamo dok. da je $\mathcal{L}(X,Y)$ vekt. pr. pa dokaz da je $\|A\|$ norma na tom prostoru.

Najprije pokažimo da je $\mathcal{L}(X,Y)$ podprostor $Hom(X,Y)$ (tj. da je podprostor jednog vekt. pr.)

Najprije $\mathcal{L}(X,Y) \neq \emptyset$ jer nul-operator njemu pripada.

Ako su $A, B \in \mathcal{L}(X,Y)$ onda imamo:

$\|(A+B)(x)\|_Y = \|A(x) + B(x)\|_Y \leq \|A(x)\|_Y + \|B(x)\|_Y \leq$

(zbog A - ograničen operator) $\leq \|A\| \|x\|_X + \|B\| \|x\|_X =$

$= (\|A\| + \|B\|) \|x\| < \infty$ što znači da je operator $A+B$ ograničen pa prema tome imamo da je $A+B \in \mathcal{L}(X,Y)$

Uzmimo $\lambda \in K$ (polje iz kojih uzeti prostori X i Y po volji)

Posmatramo λA operator. Imamo

$\|(\lambda A)(x)\|_Y = \|\lambda (A(x))\|_Y = |\lambda| \|A(x)\| \leq |\lambda| \|A\| \|x\| < \infty$

pa je prema tome i $\lambda A \in \mathcal{L}(X,Y)$

Dakle $\mathcal{L}(X,Y)$ je vektorski podprostor prostora homomorfizama iz X u Y pa je i sam vektorski prostor.

Pokažimo sada da je funkc. koja operatoru A pridružuje normu $\|A\|$ na način (*) norma na prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$

1. $\|\mathcal{A}\| \geq 0$ i $\|\mathcal{A}\| = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A} = 0$ (nul-operator)

Rješenje: $\|\mathcal{A}\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} \|\mathcal{A}(x)\|_Y \geq 0$

Pretpostavimo sada da je $\|\mathcal{A}\| = 0$. To znači da je $\sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0_X}} \frac{\|\mathcal{A}(x)\|_Y}{\|x\|_X} = 0$

Dakle najveći od svih izraza $\|\mathcal{A}(x)\|_Y$ je nula tj.

$\|\mathcal{A}(x)\|_Y = 0 \quad \forall x \in X$. Budući da je $\|\mathcal{A}(x)\|_Y$ norma u prostoru

Y to znači da je $\mathcal{A}(x) = 0 \quad \forall x \in X$, odnosno da je

$\mathcal{A}$ nul-operator.

$\Leftarrow$: Ako je $\mathcal{A}$ nul-operator onda je $\mathcal{A}(x) = 0(x) = 0_Y \quad \forall x \in X$

odnosno da je $\|\mathcal{A}\| = \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} \|\mathcal{A}(x)\| = 0$

Dakle prvo svojstvo ova norma zadovoljava

2. $\|\lambda \mathcal{A}\| = |\lambda| \, \|\mathcal{A}\|$

Već smo pokazali da je $\|\lambda \mathcal{A}\| \leq |\lambda| \|\mathcal{A}\|$. Trebamo dokazati jednakost.

$\|\lambda \mathcal{A}\| = \sup_{x \in X} \frac{\|\lambda \mathcal{A}(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0_X}} \frac{\|\lambda (\mathcal{A}(x))\|}{\|x\|} =$ ($\mathcal{A}$ je linearan pa λ može ići unutra) $= \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0_X}} \frac{\|\mathcal{A}(x)\|}{\|x\|_X} =$

$= |\lambda| \sup_{\substack{x \in X \\ x \neq 0_X}} \frac{\|\mathcal{A}(\lambda x)\|}{|\lambda| \|x\|_X} = |\lambda| \sup_{\substack{\lambda x \in X \\ x \neq 0_X}} \frac{\|\mathcal{A}(\lambda x)\|}{\|\lambda x\|} = |\lambda| \|\mathcal{A}\|$

Svojstvo 2. je dok.

3. $\|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|$ – već dokazano

Zaključujemo da je $\mathcal{L}(X, Y)$ normirani vekt. prostor!

*) Ako su X i Y Banahovi prostori, pokazati da je $\mathcal{L}(X,Y)$ takođe banahov prostor.

Rj:

To znači ako su X i Y kompletni v. prostori da je i $\mathcal{L}(X,Y)$ kompletan vekt. pr.

Na osnovu prethodnog zadatka, zaključujemo da je $\mathcal{L}(X,Y)$ normirani vekt. prostor. Trebamo još pokazati da je $\mathcal{L}(X,Y)$ kompletan, tj. da je svaki košijev niz prostora $\mathcal{L}(X,Y)$ konvergentan u $\mathcal{L}(X,Y)$

X i Y su Banahovi prostori i to ćemo koristiti. Neka je $\{A_n\}$ košijev niz u prostoru $\mathcal{L}(X,Y)$. To znači da $\|A_n - A_m\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \to 0$ kad $n,m \to \infty$. Ali $A_n : X \to Y$ operator

Mi treba da pokažemo da postoji neki operator A_0 koji teži 0 kad $n \to \infty$. Uzmimo $x \in X$ proizvoljan ali čvrst.

Šta se dešava sa $\|(A_n - A_m)(x)\|_Y$?

$\|(A_n - A_m)(x)\|_Y = \|A_n(x) - A_m(x)\|_Y$. Sa druge strane je:

$\|(A_n - A_m)(x)\| \leq \|A_n - A_m\| \|x\| \to 0$ kad $n,m \to \infty$

To znači da $\|A_n(x) - A_m(x)\| \to 0$ kad $n,m \to \infty$, pa je niz $\{A_n(x)\}$ košijev niz u prostoru Y. A pošto je Y banahov prostor, kompletan je, pa je ovaj niz.

... u prostoru Y postoji $\lim \mathcal{A}_n(x)$, odnosno $y_0 \in Y$ takav da $\mathcal{A}_n(x) \to y_0$ kad $n \to \infty$

Definišimo sada funkc. $\mathcal{A}_0(x)$ tako da je $\mathcal{A}_0(x) = y_0$

x je bilo čvrsto ali proizvoljno iz X. Mi dakle možemo definisati operator $\mathcal{A}_0$ na X. Očigledno je $\mathcal{A}_0$ ograničen linearni operator.

Sada treba pokazati da je $\mathcal{A}_0$ limes niza $\{\mathcal{A}_n\}$

Dakle posmatramo $\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_0\|_{\mathcal{L}(X,Y)}$ i trebamo pokazati da $\to 0$ kad $n \to \infty$. Uzmimo proizvoljno ali čvrsto $x \in X$ koje je $\|x\| = 1$.

Pošto je $\{\mathcal{A}_n\}$ Košijev niz to $\forall \varepsilon > 0 \ \exists N(\varepsilon) \ \|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_m\| < \varepsilon$ $\forall m, n \geq N$.

Zapravo to je $\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_0\| = \sup\limits_{\substack{x \in X \\ \|x\| = 1}} \|\mathcal{A}_n(x) - \mathcal{A}_0(x)\|$

Sada posmatramo $\|(\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_m)(x)\| = \|\mathcal{A}_n(x) - \mathcal{A}_m(x)\| \leq$

$\leq \underbrace{\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_m\|}_{< \varepsilon} \underbrace{\|x\|}_{1} < \varepsilon$ kad $m, n > N$ (*)

Ako ovdje fiksiramo čvrsto m i pustimo da $n \to \infty$, tada dobijamo $\mathcal{A}(x) \to \mathcal{A}_0(x)$ i $m \to \infty$ i pa imamo

$\|\mathcal{A}_n - \mathcal{A}_0\| \to 0$ kad $n \to \infty$

Dakle niz $\{\mathcal{A}_n\}$ je konverg. u prostoru $\mathcal{L}(X,Y) \Rightarrow \mathcal{L}(X,Y)$ Banahov prostor.

*) Neka je X normiran prostor konačne dimenzije n, a $\{e_1, \dots, e_n\}$ bilo koja baza prostora X. Svake dvije norme na prostoru X su ekvivalentne. Dokazati da su ekvivalentne norme:

I $\|x\|_1 = \max_j |\xi^j|$

II $\|x\|_2 = \sum_{j=1}^{n} |\xi^j|$

III $\|x\|_3 = \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi^j|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

gdje je $x = \sum_{j=1}^{n} \xi^j e_j$ (prikaz vekt. x u bazi $\{e_1, \dots, e_n\}$).

Rj:

Ovo ustvari znači da imamo bazu $e_1, \dots, e_n$ i uzmimo npr. vektor $x = (\underset{\xi^1}{1}, \underset{\xi^2}{2}, 5, 7, \underset{\xi^5}{2})$

$\|x\|_1 = 7$; $\|x\|_2 = \sum \xi^j = 17$; $\|x\|_3 = \sqrt{1+4+25+49+4} = \sqrt{83}$

Def: Za dvije norme kažemo da su ekvivalentne ako postoje brojevi α i β takvi da je $\alpha \|\ \|_1 \le \|\ \|_2 \le \beta \|\ \|_1$

Dakle mi konkretno imamo $\alpha\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le \beta\|x\|_1 \quad \forall x \in X$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Pokažimo da su norme $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ i $\|x\|_3$ ekvivalentne:

1° $\|x\|_1 = \max_j |\xi^j| \le \sum_{j=1}^{n} |\xi^j| = \|x\|_2 \le \sum_{j=1}^{n} \max_j |\xi^j| =$

$= n \cdot \max_j |\xi^j| = n \cdot \|x\|_1$. Dakle imamo:

$\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le n \cdot \|x\|_1$ gdje je $\alpha = 1$ i $\beta = n$ - fiksan broj pa su norme $\|x\|_1$ i $\|x\|_2$ ekvivalentne.

... a i b pripadaju ... $\max\{a,b\}$, ...

... Imamo nejednakost

$$a \le \sqrt{a^2+b^2} \le \sqrt{a^2+2ab+b^2} \le a+b \le 2\max\{a,b\} = 2a$$

$$\|x\|_1 = \max_i |\xi^i| \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi^i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le n \cdot \max_i |\xi^i| = n \|x\|_1$$

pa je odavde $\|x_1\| \le \|x\|_3 \le n \|x_n\|$ gdje su

$\alpha = 1$ i $\beta = n$, pa su norme $\|x\|_n$ i $\|x\|_3$ ekviv.

Mogli smo i ovako:

$$\|x\|_1 = \max_j |\xi^j| \le \left(\sum_{j=1}^{n} |\xi^j|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\sum_{j=1}^{n} \max_j |\xi^j|^2\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(n \cdot \max_j |\xi^j|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}\, \|x\|_1 \to$$ bolja procjena

pa imamo $\|x\|_1 \le \|x\|_3 \le \sqrt{n}\, \|x\|_1$ gdje su

$\alpha = 1$, $\beta = \sqrt{n}$ $\Rightarrow$ norme $\|x\|_1$ i $\|x\|_3$ ekviv.

3° Imamo $\|x\|_2 \le n \|x\|_1$ tj. $\frac{1}{n}\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \|x\|_3$

$\le \sqrt{n}\|x\|_1 \le \sqrt{n}\, \|x\|_2$ jer je $\|x\|_1 \le \|x\|_2$ pa je

$$\frac{1}{n}\|x\|_2 \le \|x\|_3 \le \sqrt{n}\, \|x\|_2 \Rightarrow \alpha = \frac{1}{n},\ \beta = \sqrt{n}$$

4). Neka je $\|\ \|$ bilo koja norma na prostoru X, a

$Y \subseteq X$. Po definiciji skup Y u normiranom

prostoru X je ograničen akko $\exists \gamma \in \mathbb{R} : \|x-y\| < \gamma$

$\forall x,y \in Y$. Dokazati da je skup Y ograničen i $x,y \in Y$.

Dok. da je Y ograničen akko $\exists \gamma' : \|x\| < \gamma'$ $\forall x \in Y$

Rj: Pretp. da važi $\|x\| < \gamma \quad \forall x \in Y$. Trebamo da dokažemo da tada važi $\|x-y\| < \gamma'$ pa imamo:

$\|x-y\| \le \|x\| + \|y\| < \gamma' + \gamma'$. Znači $\|x-y\| < 2\gamma' \quad \forall x, y \in Y$.

pa je po našoj def. Y zatvoren podskup.

Pretp. sada da važi $\|x-y\| < \gamma \quad \forall x, y \in Y$

$\|x\| = \|x-y+y\| \le \|x-y\| + \|y\| \le \gamma + \|y\| \quad \forall x \in X$ i $\forall y \in X$

Međutim mi ne možemo Y držati čvrsto pa možemo uzeti $\gamma' = \gamma + \|y\|$ pa imamo:

$\|x\| < \gamma' \quad \forall x \in X$

*) Neka je X normiran prostor a Y konačno-dimenzionalni podprostor prostora X. Dokazati da $\forall x \in X \ \exists y_0 \in Y$:

$\|x - y_0\| = \inf_{y \in Y} \|x-y\|$

Rj: Stavimo da je $\alpha = \inf_{y \in Y} \|x-y\|$ (x-fiksno a y prolazi skupom Y)

Formirajmo skup $A = \{y \in Y : \|x-y\| \le 1 + \alpha\}$. Ovaj skup A s obzirom da je $\alpha = \inf_{y \in Y} \|x-y\|$ je različit od O.

A je zatvoren i ograničen jer je $A + \alpha$ neki broj. —

Onda funkc. $f(y) = \|x-y\|$ je neprekidna, a na ograničenom i zatvorenom skupu ona prima minimum

pa $\exists y_0 \in A : \|x-y_0\| = \inf_{y \in A} \|x-y\| = \inf_{y \in Y} \|x-y\|$

[illegible] sujedi vrh def. skupa A.

*) Neka je $X = K^{m \times n}$ polje kompleksnih ili realnih brojeva i preslikavanja

$\| \|_1$ def. sa $\|A\|_1 = n \max_{i,j} (\alpha_i^j)$

$\| \|_2$ -II- $\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |\alpha_i^j|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

$\| \|_3$ -II- $\|A\|_3 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i^j|$

$\| \|_4$ -II- $\|A\|_4 = \max_i \sum_{j=1}^{n} |\alpha_i^j|$

gdje je $A = (\alpha_i^j)_{m \times n}$ proizvoljna matrica.

Dokazati da u slučaju kada je $m = n$ ova preslikavanja predstavljaju norme na algebri $K^{m \times n}$ realnih (kompleksnih) matrica.

Rj: Pokažimo najprije da je $\| \|_1$ norma:

1) $\|A\|_1 = n \max_i |\alpha_i^j| \geq 0$ i ako je $\|A\|_1 = 0 \Rightarrow$

(n) $\max |\alpha_i^j| = 0$ tj. $|\alpha_i^j| = 0 \Rightarrow \alpha_{ij} = 0$ pa je A nula matrica.

$\Leftarrow$: $\|A\| = 0$, je A nula matrica, jednostavno se dok. gornje dvije

2) $\| \|_1$

$\|\lambda A\|_1 = n \max_i |\lambda \alpha_i^j| = n |\lambda| \max_i |\alpha_i^j| = |\lambda| \, \|A\|_1$

3) $\|A + B\|_1 = n \cdot \max_i |\alpha_i^j + \beta_i^j| = n \cdot \max_i (|\alpha_i^j| + |\beta_i^j|) =$

$= n \max_{i} |\alpha_i^j| + n \cdot \max_{i} |\beta_i^j| = \|A\|_1 + \|B\|_1$

Znači prva funkc. je norma za matricu $A = [\alpha_i^j]_{m \times n}$.

Pokažimo isto za $\|\cdot\|_2$

$1^\circ)$ $\|A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |\alpha_i^j|^2 \right)^{1/2} \geq 0$; za $\|A\|_2 = 0$ pa imamo

$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |\alpha_i^j|^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha_i^j = 0 \quad \forall i,j \quad i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}$

$\Leftrightarrow$ $A = 0$ - nula matrica (vaši i obrnuto)!

$2^\circ)$ $\|\lambda A\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |\lambda \alpha_i^j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(|\lambda|^2 \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |\alpha_i^j|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} =$

$= |\lambda| \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |\alpha_i^j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |\lambda| \, \|A\|_2 .$

$3^\circ)$ Uzmimo matrice $A = (\alpha_i^j)$ i $B = (\beta_i^j)$

$\|A + B\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |\alpha_i^j + \beta_i^j|^2 \right)^{\frac{1}{2}} =$ [Koši Švarcova vrijedi:

$\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha^i \beta^i| \right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha^i|^2 \right) \left(\sum_{i=1}^{n} |\beta^i|^2 \right)$, mi ćemo primijeniti

nejednakost Minkovskog] $= \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \left(|\alpha_i^j|^2 + |\beta_i^j|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} =$

$= \|A\|_2 + \|B\|_2$

Za ostale norme pokazati sami!!

Pokažimo još da za $m = n$ vrijedi $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \, \|B\|$

Stavimo da je $A \cdot B = \gamma_i^j$, gdje je $\gamma_i^j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^j \beta_i^k$ pa

imamo: $\|A \cdot B\|_1 = n \cdot \max_{i,j} |\gamma_i^j| = n \cdot \max_{i,j} \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^j \beta_i^k \right| <$

$\leq n \cdot \max_{i,k} |\beta_i^k| \cdot \max_{j} \left| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^j \right| \leq \|B\|_1 \, n \max_{j,k} |\alpha_k^j| =$

$= \|A\|_1 \cdot \|B\|_1$

$$\ldots \sum_{k=1} \sum_{j=1} \ldots \Big) \ldots \Big(\sum_{i=1} \sum_{j=1} \Big| \sum_{k=1} \alpha_k \beta_i \Big| \Big) \leq$$

$$\leq \Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \Big(\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k^j|^2 \Big) \Big(\sum_{k=1}^{n} |\beta_i^k|^2 \Big) \Big)^{\frac{1}{2}} = \Big($$ primijenili

Koši-Švarcova nejednakost, jedna od njih ne zavisi od i, a druga od j $\Big) = \Big(\Big(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k^j|^2 \Big) \Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |\beta_i^k|^2 \Big) \Big)^{\frac{1}{2}} =$

$$= \|A\|_2 \cdot \|B\|_2$$

$$\|A \cdot B\|_3 = \max_j \sum_{i=1}^{n} |\gamma_i^j| = \max_j \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^j \beta_i^k \Big| \leq$$

$$\leq \max_j \sum_{i=1}^{n} \Big| \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^j \max_k |\beta_i^k| \Big| = \Big(\max_j \sum_{i=1}^{n} \beta_i^k \Big) \Big(\max_j \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^j \Big) =$$

$$= \|A\|_3 \cdot \|B\|_3 .$$

16.04.'04.

Gramova determinanta (matrica)

*) Neka je X unitaran prostor i $x_1, \dots, x_n \in X$. Za

$$G(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_n, x_1 \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_1, x_n \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle \end{bmatrix}$$

se definiše gramova matrica vektora $x_1, \dots, x_n$.

Dokazati da je $\det G \equiv \Gamma$ jednaka 0 akko su vekt. $x_1, \dots, x_n$ lin. zavisni.

Rj: Neka su $\{x_1, \dots, x_n\}$ lin zavisni, znači postoje skalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ne svi jednaki 0, takvi da je
$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \Rightarrow$

$$\lambda_1 \langle x_1, x_1 \rangle \dots \lambda_n \langle x_n, x_1 \rangle = 0$$
$$\vdots$$
$$\lambda_1 \langle x_1, x_n \rangle \dots \lambda_n \langle x_n x_n \rangle = 0$$

Dobili smo homogeni sist. od n jednačina za n nepoznatih, koji ima netrivijalno rj., što znači da je det. tog sist. jednaka 0, a det. ovog sist. je upravo gramova det. Γ

$\Leftarrow$: Neka je sada gramova det. vektora $\{x_1, \dots, x_n\}$ jednaka 0. To znači da sist. jednačina ima rj. koja je različita od trivijalnog jedno takvo ~~rj~~ netrivijalno rj. Označimo sa $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$ i posmatrajmo vektor

Pomnožimo vektor x redom sa $x_1, \dots, x_n$. Dobijamo

$\langle x, x_1 \rangle = \bar\lambda_1 \langle x_1, x_1 \rangle + \bar\lambda_2 \langle x_2, x_1 \rangle + \dots + \bar\lambda_n \langle x_n, x_1 \rangle$

$\langle x, x_2 \rangle = \bar\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle + \bar\lambda_2 \langle x_2, x_2 \rangle + \dots + \bar\lambda_n \langle x_n, x_2 \rangle$

$\vdots$

$\langle x, x_n \rangle = \bar\lambda_1 \langle x_1, x_n \rangle + \bar\lambda_2 \langle x_2, x_n \rangle + \dots + \bar\lambda_n \langle x_n, x_n \rangle$

Množeći ih sa odgovarajućim λ i sumirajući dobijamo

$\langle x, \sum_1 \lambda_i x_i \rangle = 0$ pa tvrdnja vrijedi.

*) Neka je X unitaran prostor i $G = G(x_1, \dots, x_n)$ gramova matrica, a $\Gamma = \Gamma(x_1, \dots, x_n)$. Ako je prostor Y generiran vektorima $[x_1, \dots, x_n] = Y$ dokazati da $x = y + z$ gdje je $y \in Y$, $z \in Y^\perp$ vrijedi $\Gamma(x_1, \dots, x_n, x) = \|z\|^2 \Gamma(x_1, \dots, x_n)$ pa na osnovu toga zaključiti da je $\Gamma(x_1, \dots, x_n) \leq$ $\leq \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \dots \|x_n\|^2$

Rj: $\Gamma(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \langle x_2, x_1 \rangle & \dots & \langle x_n, x_1 \rangle & \langle x, x_1 \rangle \\ \vdots & & & & \\ \langle x_1, x_n \rangle & \langle x_2, x_n \rangle & \dots & \langle x_n, x_n \rangle & \langle x, x_n \rangle \\ \langle x_1, x \rangle & \langle x_2, x \rangle & \dots & \langle x_n, x \rangle & \langle x, x \rangle \end{vmatrix} =$

$x = y + z \Rightarrow \langle x_i, x \rangle = \langle x_i, y + z \rangle = \langle x_i, y \rangle + \langle x_i, z \rangle$

isto i:

$\langle x, x_i \rangle = \langle y + z, x_i \rangle = \langle y, x_i \rangle + \langle z, x_i \rangle$

$\langle x, x \rangle = \langle y + z, y + z \rangle = \langle y, y \rangle + \langle y, z \rangle + \langle z, y \rangle + \langle z, z \rangle =$

$= \|y\|^2 + \|z\|^2$

$$= \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \dots & \langle y, x_1\rangle \\ \vdots & & \\ \langle x_1, x_n\rangle & \dots & \langle y, x_n\rangle \\ \langle x_1, x\rangle & \dots & \|y\|^2 + \|z\|^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \dots & \langle x_n, x_1\rangle & \langle y, x_1\rangle \\ \vdots & & & \\ \langle x_1, x_n\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle & \langle y, x_n\rangle \\ \langle x_1, y\rangle & \dots & \langle x_n, y\rangle & \|y\|^2 \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \langle x_1, x_1\rangle & \dots & \langle x_n, x_1\rangle & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \langle x_n, x_1\rangle & \dots & \langle x_n, x_n\rangle & 0 \\ \langle x_1, x\rangle & \dots & \langle x_n, x\rangle & \|z\|^2 \end{vmatrix} = \Gamma(x_1, \dots, x_n, y) + \Gamma(x_1, \dots, x_n)\|z\|^2$$

Pošto su vekt. $y, x_1, \dots, x_n$ lin. zavisni pa prema prethodnom zad.

$\Gamma(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \rightarrow$

$\Gamma(x_1, \dots, x_n, x) = \|z\|^2 \, \Gamma(x_1, \dots, x_n)$

$\Gamma(x_1, \dots, x_n) \leq \|x_1\|^2 \|x_2\|^2 \dots \|x_n\|^2$

Za $n = 1$

$\Gamma(x_1) = \|x\|^2$

Neka vrijedi za $n = k$ $\Gamma(x_1, \dots, x_k) \leq \|x_1\|^2 \dots \|x_k\|^2$.

Posmatrajmo gramovu det. za $n = k+1$

$\Gamma(x_1, \dots, x_{k+1})$

$x_{k+1} = y + z$ $(y \in [x_1, \dots, x_k], \ z \in y^\perp)$ pa prema dokazanom

imamo da je $\Gamma(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) = \|z\|^2 \Gamma(x_1, \dots, x_k)$

Prema pitagorinoj tk. $\|x_{k+1}\|^2 = \|z\|^2 + \|y\|^2$ pa:

$\|z\|^2 \leq \|x_{k+1}\|^2$ očigledno

$\|\neq\|$ $\Gamma(x_1,\dots,x_k) \le \|x_{k+1}\| \; \Gamma(x_1,\dots,x_k) \le \|x_{k+1}\|^2 \|x_k\|^2 \dots \|x_1\|^2$

pa po princ. mat. indukcije zaključujemo da tvrdnja važi $\forall n \in \mathbb{N}$.

*) Neka je $A=\{a_1,a_2,\dots\}$ lin. nez. podskup unitarnog prostora X a $B=\{b_1,b_2,\dots\}$ skup definisan na sl. način

$$b_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}$$

$$b_{n+1} = \frac{\begin{vmatrix} \langle a_1,a_1\rangle & \dots & \langle a_1,a_n\rangle & a_1 \\ \langle a_n,a_1\rangle & \dots & \langle a_n,a_n\rangle & a_{n+1} \end{vmatrix}}{\sqrt{\Gamma(a_1,\dots,a_n)\,\Gamma(a_1,\dots,a_{n+1})}}$$

Dok. da je B ortonormiran skup i da je skup generisan vektorima $\{a_1,a_2,\dots\}$ isto što i skup generisan $\{b_1,b_2,\dots\}$

Rj: $[a_1,a_2,\dots] = [b_1,b_2,\dots]$ ortonormiran skup vektora!

Treba pokazati da je $\langle b_i, b_j\rangle = \delta_{ij}$ → (kronekerov simbol)

Uzmimo vektor b_{i+1} i pomnožimo ga sa a_j gdje je $j=1,2,\dots,i$

$$\langle b_{i+1}, a_j\rangle = \frac{\begin{vmatrix} \langle a_1,a_1\rangle & \dots & \langle a_1,a_i\rangle & \langle a_1,a_j\rangle \\ \langle a_{i+1},a_1\rangle & \dots & \langle a_{i+1},a_i\rangle & \langle a_{i+1},a_j\rangle \end{vmatrix}}{\sqrt{\Gamma(a_1,\dots,a_i)\,\Gamma(a_1,\dots,a_{i+1})}}$$

Ako $j=1,\dots,i$ to znači da u gornjoj det. imamo dvije jednake kolone, dakle $\langle b_{i+1},a_j\rangle = 0 \;\; \forall j=1,2,\dots,i$.

Vekt. b_j je lin. kombinacija vektora $a_1,\dots,a_{j-1}$ tj.

$b_j = c_1 a_1 + \dots + c_{j-1} a_{j-1}$ pa je

$\langle b_{i+1}, b_j \rangle = \langle b_{i+1}, c_1 a_1 + \dots + c_{j-1} a_{j-1} \rangle =$

$= c_1 \langle b_{i+1}, a_1 \rangle + c_2 \langle b_{i+1}, a_2 \rangle + \dots + c_{j-1} \langle b_{i+1}, a_{j-1} \rangle$

Ako je $i+1 > j$ onda je ovo sve jednako nuli (dokazano neposredno prije) pa imamo

$\langle b_k, b_j \rangle = 0$ za $k \neq j$ zbog simetričnosti skalara.

Pokažimo još da je $\langle b_i, b_i \rangle = 1$

$b_i = c_1 a_1 + \dots + c_i a_i \quad / b_i$

$$\langle b_i, b_i \rangle = \underbrace{c_1 \langle a_1, b_i \rangle + c_2 \langle a_2, b_i \rangle + \dots}_{=0} + c_i \langle a_i, b_i \rangle$$

$$c_i = (-1)^{i+1+i-1} \frac{\begin{vmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle & \dots & \langle a_1, a_{i-1} \rangle \\ \vdots & & & \\ \langle a_{i-1}, a_1 \rangle & \langle a_{i-1}, a_2 \rangle & \dots & \langle a_{i-1}, a_{i-1} \rangle \end{vmatrix}}{\sqrt{\Gamma(a_1, \dots, a_{i-1}) \Gamma(a_1, \dots, a_i)}} =$$

$$= \frac{\Gamma(a_1, \dots, a_{i-1})}{\sqrt{\Gamma(a_1, \dots, a_{i-1}) \Gamma(a_1, \dots, a_i)}} = \sqrt{\frac{\Gamma(a_1, \dots, a_{i-1})}{\Gamma(a_1, \dots, a_i)}}$$

$$\langle b_i, a_i \rangle = \frac{\begin{vmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \dots & \langle a_1, a_i \rangle \\ \vdots & & \\ \langle a_i, a_1 \rangle & \dots & \langle a_i, a_i \rangle \end{vmatrix}}{\sqrt{\Gamma(a_1, \dots, a_{i-1}) \Gamma(a_1, \dots, a_i)}} = \frac{\Gamma(a_1, \dots, a_i)}{\sqrt{\Gamma(a_1, \dots, a_{i-1}) \Gamma(a_1, \dots, a_i)}} =$$

$$\sqrt{\frac{\Gamma(a_1, \dots, a_i)}{\Gamma(a_1, \dots, a_{i-1})}}$$

$\Rightarrow \langle b_i, b_i \rangle = \sqrt{\frac{\Gamma(a_1,\dots,a_{i-1})}{\Gamma(a_1,\dots,a_i)}} \cdot \sqrt{\frac{\Gamma(a_1,\dots,a_i)}{\Gamma(a_1,\dots,a_{i-1})}} = \Delta$ i zadatak je završen

*) Dokazati da se gramova determinanta ne mijenja u procesu ortogonalizacije vektora, tj. ako vektori $(a_1,\dots,a_k)$ pri procesu ortogon. pređu ~~sek~~ vektore $(b_1,\dots,b_k)$

$\Gamma(a_1,\dots,a_k) = \Gamma(b_1,\dots,b_k) = \|b_1\|^2 \|b_2\|^2 \dots \|b_k\|^2$

R:

$\Gamma(b_1,\dots,b_k) = \|b_1\|^2 \dots \|b_k\|^2$. Ostaje da se dokaže

$\Gamma(a_1,\dots,a_k) = \|b_1\|^2 \dots \|b_k\|^2$

$a_1 = b_1 \quad \|a_1\|^2 = \|b_1\|^2$ pa sad vrijedi

Neka važi za neko $n \in N$ tada je

$\Gamma(a_1,\dots,a_n) = \|b_1\|^2 \dots \|b_n\|^2$

$a_{n+1} = y + z, \ y \in [a_1,\dots,a_n], \ z \in [a_1,\dots,a_n]^\perp$

m. $[a_1,\dots,a_n] = [b_1,\dots,b_n]$ što znači da je

$z = b_{n+1}$ pa je

$\Gamma(a_1,\dots,a_{n+1}) = \Gamma(a_1,\dots,a_n)\|b_{n+1}\|^2 = \|b_1\|^2 \|b_2\|^2 \dots \|b_{n+1}\|^2$ pa tvrdnja vrijedi.

*) Dokazati slj. osobinu gramove det.

$\Gamma(a_1,\dots,a_k, b_1,\dots,b_l) \le \Gamma(a_1,\dots,a_k)\,\Gamma(b_1,\dots,b_l)$ pri čemu znak jednakosti vrijedi akko je $\langle a_i, b_j \rangle = 0 \quad \forall i = \overline{1,k},\ j = \overline{1,l}$ ili je jedan od skupova $\{a_1, \dots, a_k\} \vee \{b_1, \dots, b_l\}$ lin. ~~zavisan~~ skup

Rj:

Očito ako je bilo koji od skupova $(a_1, \dots, a_k)$ i $(b_1, \dots, b_l)$

jednake nuli tada važi jednakost

Neka su skupovi lin. nezavisni i nisu jednostavno ortogonalni:

Neka vektori $\{a_1, \dots, a_k\}$ prelaze u vektore $\{c_1, \dots, c_k\}$ a

vekt. $\{b_1, \dots, b_l\} \to \{e_1, \dots, e_l\}$

Ako primijenimo postupak ortogonalizacije za vektore

$\{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l\} = \{c_1, \dots, c_k, d_1, \dots, d_l\}$

$\Gamma(a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_l) = \|c_1\|^2 \dots \|c_k\|^2 \|d_1\|^2 \dots \|d_l\|^2$

$\Gamma(a_1, \dots, a_k) = \|c_1\|^2 \|c_2\|^2 \dots \|c_k\|^2$

$\Gamma(b_1, \dots, b_l) = \|e_1\|^2 \dots \|e_l\|^2$

Treba pokazati da je $\|d_1\|^2 \dots \|d_l\|^2 < \|e_1\|^2 \dots \|e_l\|^2$

Posmatramo vekt. $[b_1, \dots, b_{i-1}]$, vekt. $b_i = y + e_i$, $e_i \in [b_1, \dots, b_{i-1}]^\perp$,

$y \in [b_1, \dots, b_{i-1}]$

Posmatramo vekt. b_i u skupu $[a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_{i-1}]$ i dobivamo

$b_i = \bar{y} + d_i$ gdje je $d_i \in [a_1, \dots, b_{i-1}]^\perp$ i vekt. $e_i = \bar{\bar{y}} + z$ gdje

je $\bar{\bar{y}} \in [a_1, \dots, b_{i-1}]$, $z \in [a_1, \dots, b_{i-1}]^\perp$

Sada je $b_i = y + \bar{\bar{y}} + z$ a y i $\bar{\bar{y}} \in [a_1, \dots, b_{i-1}]$. Odavde je

$z \in [a_1, \dots, b_{i-1}]$ pa iz jedinstvenosti i def. imamo da je

[illegible]

$\le \|a_1\|^2 \ldots \|a_n\|^2 \|e_1\|^2 \ldots \|e_i\|^2$ jer je $\|a_i\|^2 \le \|e_i\|^2$.

3) Neka je H neparabolan Hilbertov prostor. Neka je u H maximalan ortonormiran skup.

2) Separabilan skup znači da taj skup sadrži prebrojivo gust skup.

Skup D je gust u H ako $\bar{D} = H$ ili ako je udaljenost tačaka skupa D i skupa $M = 0$.

Taj prebrojiv svuda gust podskup označimo sa H = {...}

Iz skupa M izdvojimo skup S lin nezavisnih vektora {$y_1, \ldots, y_n, \ldots$}. Skup S možemo ortonormirati tako što stavimo $x_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|}$ a

$$x_{n+1} = \frac{\begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_1, y_n \rangle & y_1 \\ \langle y_{n+1}, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_{n+1}, y_n \rangle & y_n \end{vmatrix}}{\sqrt{\Gamma(y_1, \ldots, y_n)\,\Gamma(y_1, \ldots, y_{n+1})}}$$

Skup $[x_1, \ldots] = [y_1, \ldots]$

Ako uzmemo $x \in H$ proizvoljno i ako je $x \perp S$ onda dobijamo pa je $x \perp M$, a pošto je M gust u H to je $x = 0$. Dakle skup $S = \{x_1, x_2, \ldots\}$ maximalan ortonormiran skup u H.

Matrice

prije!!

1. Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ izračunati A^n

Rj: Najprije napišimo matricu A kao zbir jedinične i još jedne matrice:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E + B$$

Sada promatrajmo čemu je jednako B^2

$$B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle kako da je $B^3 = 0$ matrice E i B komutiraju jer jedinična matrica komutira sa svakom pa je

$$A^n = (B+E)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k E^{n-k} = \binom{n}{0} B^0 E^n + \binom{n}{1} B E^{n-1} +$$

$$+ \binom{n}{2} B^2 E^{n-2} + \underbrace{\binom{n}{3} B^3 E^{n-3} + \dots}_{=0} = E + \binom{n}{1} B + \binom{n}{2} B^2$$ pa je

$$\cancel{A^n = (B+E)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k E^{n-k} = \binom{n}{0} B^0 E^n + \binom{n}{1} B E^{n-1}}$$

matrica $$A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 & 0 \\ -n & -n & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{n(n-1)}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ n & 1 & 0 & 0 \\ \frac{n(n-1)}{2} & n & 1 & 0 \\ -n - \frac{(n-1)n}{2} & -n & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t+2t^2 \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; t \in R$$

a) Ako $p, q \in R$ ispitati da li $A(p) \cdot A(q) \in M$

b) Naći inverznu matricu matrice $A(t)$, $t \in R$

c) Koristeći zaključak iz a) odrediti $(A(t))^4$, $t \in R$

R:

a) $$A(p) \cdot A(q) = \begin{bmatrix} 1 & p & 2p+2p^2 \\ 0 & 1 & 4p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & q & 2q+2q^2 \\ 0 & 1 & 4q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & q+p & 2q+2q^2+4pq+2p+2p^2 \\ 0 & 1 & 4q+4p \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ imamo da je

$2q+2q^2+4pq+2p+2p^2 = 2(p+q) + 2(p^2+2pq+q^2) =$

$= 2\underbrace{(p+q)}_{r} + 2\underbrace{(p+q)}_{r}^2 = 2r + 2r^2$

(isto tako dobijemo da je $4p+4q = 4\underbrace{(p+q)}_{4r}$

$$A(p) \cdot A(q) = \begin{bmatrix} 1 & r & 2r+2r^2 \\ 0 & 1 & 4r \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in M$$

b) $$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t & 2t+2t^2 \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \det(A(t)) = 1$$

Idemo preko kofaktora.

$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 4t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 0 & 4t \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$;

$A_{13} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; $A_{21} = -1$

c) $A(\ ) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & t+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\det(A(t)) = 1$;

Na osnovu zaključka a) zaključujemo da je

$(A(t))^n = A(nt)$. Vidimo iz $A(p) \cdot A(q) \in M$

$A(t)A(t) = A(t+t)$ pa imamo $A^2(t) = A(2t)$

Dok. mat. indukcijom

$n=1 \quad A(t) = A(t)$

Prep. $n: \ A(t)^n = A(nt)$

$n+1: \ (A(t))^{n+1} = (A(t))^n \cdot A(t) = A(nt) \cdot A(t) \overset{\text{prep}}{\Rightarrow}$

$= A(nt+t) = A((n+1)t)$;

Za $k=0 \quad (A(t))^0 = E = A(0)$

$n = -1$

$(A(t))^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -t & 2t^2-t \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A(-t)$. Uočimo za

$n > 0$

$(A(t))^{-n} = [A(t)^{-1}]^n = (A(-t))^n = A(-nt)$ pa je dokaz završen

x) Kažemo da je matrica B kvadratni korijen matrice A ako je $B^2 = A$.

a) Odrediti kvadratne korijene matrica

$A = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

b) Konstruisati matricu 2×2 koja ima beskonačno mnogo kvadratni korijen •

B :

a) Dakle tražimo matricu $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ takvu da je

$X^2 = B$. Imamo da je

$$X^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 14 & 0 \end{bmatrix}$$

Imamo sistem

$a^2 + bc = 16$
$ca + dc = 14$ ... kada se izračuna
$ab + bd = 0 \Rightarrow b(a+d)$
$cb + d^2 = 0$ $\Rightarrow$ B nema korijena

b)

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \Rightarrow a^2 + bc = 0,$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Imamo beskonačno mnogo trojki oblika

$a^2 + bc = 0$ tj. $a^2 = -bc$, gdje su $a, b \in R$.

Dakle 0 matrica dim. 2×2 ima ∞ mnogo korijena.

Naći inv. matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & & a^{n-1} \\ 0 & 0 & 1 & & a^{n-2} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} n \in N \\ a \in R \end{matrix}$$

$$B^2 = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{T} \underbrace{\begin{bmatrix} \; \end{bmatrix}}_{T} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & a^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$$B^3 = \cdots \qquad B^n = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & a^n \\ 0 & & 0 \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

$B^{n+1} = O \Rightarrow B$ - nilpotentna matrica pa je

$A = E + B + B^2 + \cdots + B^n$, $B^{n+1} - E = B^{n+1} - E^{n+1} = (B-E)\cdot$

$\cdot(B^n + B^{n-1} + \cdots + B + E)$. Kako je $B^{n+1} = O$ imamo

da je $E = (E-B)(E+B+\cdots+B^n) = (E-B)\cdot A$;

Na isti način bi pokazali da je $E = A(E-B)$, to

znači da je $A^{-1} = E - B$. Pa imamo da je:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$ - tražena matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+2 & 1+3 & 1 \\ 1 & 1 & & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1+2n \end{bmatrix}$$

Rj:

$A \cdot B = E \quad \wedge \quad B \cdot A = E$

Trazi: se $B = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & & b_{nn} \end{bmatrix}$,

b_{11} b_{12} ...

*) Ako su A i B kv. matrice reda n, dok. da je

$\forall \lambda \in \mathbb{C},\ \det(AB - \lambda E) = \det(BA - \lambda E)$

Rj.

Def. $B_\mu = B - \mu E$. Vidimo da je

$B_\mu (AB_\mu - \lambda E) = (B - \mu E)(A(B - \mu E) - \lambda E) =$

$= (B - \mu E)(AB - \mu A - \lambda E) = BAB - \mu BA - \lambda B -$

$- \mu AB - \mu^2 A + \mu \lambda E$

$(B_\mu A - \lambda E) B_\mu = ((B - \mu E)A - \lambda E)(B - \mu E) =$

$= (BA - \mu A - \lambda E)(B - \mu E) = BAB - \mu AB - \lambda B -$

$- \mu BA + \mu A^2 + \mu \lambda E$

$\Rightarrow B_\mu (AB_\mu - \lambda E) = (BA - \lambda E) B_\mu$

$\det(B_\mu (AB_\mu - \lambda E)) = \det((B_\mu A - \lambda E) B_\mu)$

~~Dobijamo~~ $\cancel{\det(B_\mu (AB_\mu - \lambda E)) = \det((B_\mu A - \lambda E) B_\mu)}$

$\det(B_\mu) \cdot \det(AB_\mu - \lambda E) = \det(B_\mu A - \lambda E) \det(B_\mu)$

jasna je det$(B_\mu)-1$ polinom po μ, odnosno

mi imamo da je $\det(AB_\mu - \lambda E) = \det(B_\mu A - \lambda E)$

Ovo važi za $\forall \mu$. Spec. ako je $B = B_\mu$

imamo da je $\det(AB - \lambda E) = \det(BA - \lambda E)$

(fali 22.04.'04 → neću prepisati)

06.05.'04.

*) Neka je $a_1 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$

$a_2 = \frac{1}{6}(1,1,3,-5)$

Odrediti vekt. a_3 i a_4 tako da $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ budu ortonormirana baza prostora R^4

Rj:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i = \langle a, b \rangle \qquad R^n$$

$a = (a_1, \dots, a_n)$

$b = (b_1, \dots, b_n)$

Dopunimo bazu do R^4

$\{a_1, a_2\}$ Neka je $e_2 = (0,1,0,0)$

$e_3 = (0\ 0\ 1\ 0)$

Posmatramo v. a_1, a_2, e_1, e_2 i proveravamo lin. zav.

$\alpha a_1 + \beta a_2 + \gamma e_2 + \delta e_3 = 0$

$\alpha \frac{1}{2}(1,1,1,1) + \beta \frac{1}{6}(1,1,3,-5) + \gamma(0,1,0,0) + \delta(0,0,1,0) = 0$

$\frac{\alpha}{2}$ ... $\frac{\beta}{6}$ ...

$\frac{3\alpha}{2} + \frac{\sqrt{3}\beta}{6} + \gamma = 0$

$\frac{\alpha}{2} + \frac{3\beta}{6} + \delta = 0$

$\frac{\alpha}{2} - \frac{5\beta}{6} \dots = 0$

$\Rightarrow \gamma = 0$

$\delta = 0$

$\beta = 0$

$\alpha = 0$

Dakle vektori su lin. nez. i oni čine bazu vekt. pr.

$\|a_1\|^2 = \langle a_1, a_1 \rangle = \frac{1}{4} \cdot 4 = 1$

$\|a_2\|^2 = \langle a_2, a_2 \rangle = 1$

vekt. a_1 i a_2 su ortogonalni i jedinični

$\langle a_1, a_2 \rangle = 0$

$a_3 = e_2 - \frac{\langle e_2, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} \cdot a_1 - \frac{\langle e_2, a_2 \rangle}{\langle a_2, a_2 \rangle} a_2 =$

$= (0,1,0,0) - \frac{\frac{1}{2}}{1} \cdot \frac{1}{2}(1,1,1,1) - \frac{\frac{1}{6}}{1} \cdot \frac{1}{6}(1,1,3,-5) =$

$= (0,1,0,0) - \frac{1}{4}(1,1,1,1) - \frac{1}{36}(1,1,3,-5) = \dots =$

$= \frac{1}{18}(-5, 13, -6, -2)$

$a_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|} = \frac{\sqrt{18^2}}{\sqrt{234}} \cdot \frac{1}{18}(-5, 13, -6, -2) =$

$a_3 = \frac{18}{\sqrt{234}}(-5, 13, -6, -2)$

$$\ldots a_4 - \frac{\langle \ldots \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} a_1 - \frac{\langle \ldots \rangle}{\langle a_2, a_2 \rangle} a_2 - \frac{\langle \ldots \rangle}{\langle a_3, a_3 \rangle} a_3 =$$

$$= \ldots\ldots\ldots\ldots =$$

$$a_4 = \frac{\tilde{a}_4}{\|\tilde{a}_4\|}$$

baza: $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

*) Odrediti vektor a_3 tako da vekt.

a_1, a_2, a_3 čine ortonormiranu bazu prostora $\mathbb{C}^3$

ako je $a_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}(i, 2i, 1)$

$$a_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1-i, -1, 1-i)$$

Rj:

$\mathbb{C}^n$ $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i \overline{b_i}$

$a = (a_1, \ldots, a_n)$

$b = (b_1, \ldots, b_n)$

$$\|a_1\|^2 = \frac{1}{6}(i \cdot \bar{i} + 2i \cdot \overline{2i} + 1 \cdot \bar{1}) = \frac{1}{6}(1 + 4 + 1) = 1$$

$$\|a_2\|^2 = \frac{1}{5}((1-i)(1+i) + 1 + (1-i)(1+i)) = \frac{1}{5}(2 + 1 + 2) = 1$$

$$\langle a_1, a_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \langle (i, 2i, 1)(1-i, -1, 1-i) \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{30}}(i - 1 - 2i + 1 + i) = 0$$

a_1, a_2 jedinični i ortonormirani

$a_3 = (x, y, z)$ $x, y, z \in \mathbb{C}$

$\langle a_1, a_3 \rangle = 0$

$\langle a_2, a_3 \rangle = 0$

$\frac{1}{\sqrt{6}} \langle (i, 2i, 1), (x, y, z) \rangle = 0$

$\frac{1}{\sqrt{5}} \langle (1-i, -1, 1-i), (x, y, z) \rangle = 0$

$i \cdot \bar{x} + 2i \bar{y} + \bar{z} = 0$

$(1-i) \bar{x} - \bar{y} + (1-i) \bar{z} = 0$

Uzmimo $\bar{x} = 1+i$

$i(1+i) + 2i\bar{y} + \bar{z} = 0$

$(1-i)(1+i) - \bar{y} + (1-i)\bar{z} = 0$

$2i\bar{y} + \bar{z} = 1-i$

$(1-i)\bar{z} - y = -2$

$\bar{z}(3+2i) = 1-5i$

$\bar{z} = \frac{1-5i}{3+2i} \cdot \frac{3-2i}{3-2i} = \frac{-7-17i}{13}$

$y = \frac{\ldots}{13}$

$\tilde{a}_3 = \left(1-i, \frac{-2+10i}{13}, \frac{-7+17i}{13}\right) = \frac{1}{13}\left(13-13i, -2-10i, -7+17i\right)$

$a_3 = \frac{\tilde{a}_3}{\|a_3\|} = \ldots$ to se sredi pa se dobije

traženа baza $\{a_1, a_2, a_3\}$

*) Ispitati da li je sa $\langle u, v\rangle = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_2y_2$ gdje je $u=(x_1,x_2)$ $v=(y_1,y_2)$ dat skalarni proizvod u prostoru $\mathbb{R}^2$

Rj:

i) $\langle u,u\rangle \geq 0$, $\langle u,u\rangle = 0 \Leftrightarrow u=0$

ii) $\langle u, v\rangle = \overline{\langle v, u\rangle}$

iii) $\langle u+v, w\rangle = \langle u,w\rangle + \langle v,w\rangle$ $\quad \forall u,v,w \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$

iv) $\langle \alpha u, v\rangle = \alpha\langle u,v\rangle$

Osobine skalarnog proizvoda

i) $\langle u,u\rangle = x_1x_1 - x_1x_2 - x_2x_1 + 3x_2x_2 = \ldots = (x_1-x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0$ $\quad \forall (x_1,x_2)=u$

$\langle u,u\rangle = 0$

$(x_1-x_2)^2 + 2x_2^2 = 0$

$x_1 - x_2 = 0$ i $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \Rightarrow u=(0,0)$

ii) pogledno

iii) Ako je $w = \langle z_1, z_2 \rangle$

$\langle u+v, w \rangle = \langle (x_1+y_1, x_2+y_2), (z_1, z_2) \rangle =$

$= z_1(x_1+y_1) - z_2(x_1+y_1) - z_1(x_2+y_2) + 3z_2(x_2+y_2) = \ldots =$

$= (z_1x_1 - z_2x_1 - z_1x_2 + 3z_2x_2) + (z_1y_1 - z_2y_1 - z_1y_2 + 3z_2y_2) =$

$= \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$

iv)

$\langle \alpha u, w \rangle = \langle (\alpha x_1, \alpha x_2), (y_1, y_2) \rangle = \alpha x_1 y_1 - \alpha x_2 y_1 - \alpha x_1 y_2$

$+ 3\alpha x_2 y_2 = \alpha(x_1y_1 - x_2y_1 - x_1y_2 + 3x_2y_2) = \alpha \langle u, v \rangle$

Pa je ovo skalarni proizvod

*) Potprostor U prostora $\mathbb{R}^4$ definisan je sa

$U = L[a_1, a_2, a_3]$ gdje je $a_1 = (1, 0, 2, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, 3)$,

$a_3 = (0, 1, -2, 1)$. Odrediti jednu bazu prostora $U^\perp$ gdje je $U^\perp$ ortogonalni komplement prostora U.

$U^\perp \oplus U = \mathbb{R}^4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dakle $\dim U = 2$ i bazu čine

recimo vekt. a_1 i a_2 pošto su lin. nez.

$\Rightarrow \dim U^{\perp} = 2$

Tražimo $\{b_1, b_2\}$ koji su okomiti na a_1, a_2.

$b = (x, y, z, t)$

$\langle a_1, b \rangle = 0$ $\qquad x + 2z + t = 0 \Rightarrow x = -2z - t$

$\langle a_2, b \rangle = 0$ $\qquad 2x + y + 2z + 3t = 0$

$-4z - 2t + y + 2z + 3t = 0$

$y = 2z - t$, z i t proizvoljno

$\begin{cases} z = 0 \\ t = 1 \end{cases}$

$b_1 = (-1, -1, 0, 1)$

$\begin{cases} z = 1 \\ t = 0 \end{cases}$

$b_2 = (-2, 2, 1, 0)$

Očigledno lin. nez. vektori pa čine bazu $U^{\perp}$.

*) Neka su $a = (0, 1, 0, 1)$ i $b = (2, 0, -3, 1)$ elementi prostora $\mathbb{R}^4$ i neka je $V = [a, b]$. Odrediti jednu ortonormiranu bazu prostora $V^{\perp}$ i naći projekciju vektora $x = (1, 1, 1, 1)$ na prostore V i $V^{\perp}$

Rj:

$\dim V = 2 \Rightarrow \dim V^{\perp} = 2$

$\langle (x, y, z, t), (0, 1, 0, 1) \rangle = 0$

$\langle (x, y, z, t), (2, 0, -3, 1) \rangle = 0$

$2x - 3z + t = 0$

$x = \frac{1}{2}(3z - t)$ z, t proizvoljni

$t = 0$ $\quad$ $t = 1$

$z = 2$ $\quad$ $z = 1$

$x = 3$ $\quad$ $x = 1$

$y = 0$ $\quad$ $y = -1$

$c = (3, 0, 2, 0)$

$d = (1, -1, 1, 0)$ $\quad$ lin. nezav. čine bazu $V^\perp$

↓ ortonormirati

$V^\perp = [c, d]$

$b_1 = \frac{c}{\|c\|} = \frac{(3, 0, 2, 0)}{\sqrt{13}}$

?

$\tilde{b}_2 = d - \frac{\langle d, b_1 \rangle}{\langle b_1, b_1 \rangle} b_1 = (1, -1, 1, 1) - \frac{5}{\sqrt{13}} \frac{(3, 0, 2, 0)}{\sqrt{13}} = \dots$

$= \frac{1}{13}(-2, -13, 3, 13)$

$b_2 = \frac{\tilde{b}_2}{\|\tilde{b}_2\|} = \frac{\frac{1}{13} \cdot (-2, -13, 3, 13)}{\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{13}}} = \frac{\sqrt{13}}{13 \cdot 3\sqrt{3}}(-2, -13, 3, 13)$

$\mathrm{proj}_{V^\perp} x = \langle x, b_1 \rangle b_1 + \langle x, b_2 \rangle b_2$ $\quad$ gore izračunato

$\mathrm{proj}_V x = x - \mathrm{proj}_{V^\perp} x$

*) Neka preslikavanje $\mathcal{A} \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3)$ ima matricu

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

u odnosu na kanonsku bazu prostora $\mathbb{R}^3$.

i) Nađi svojstvene vrijednosti i sv. vekt. i svojstvene podprostore preslikavanja $\mathcal{A}$.

ii) Nađi regularnu matricu P tako da matrica $P^{-1}AP$ bude dijagonalna.

iii) Odrediti sve podprostore invarijantne u odnosu na $\mathcal{A}$

iv) Predstaviti $\mathbb{R}^3$ kao direktnu sumu dva podpr. pr. $\mathbb{R}^3$ koji su međusobno ortogonalni u odnosu na uobičajeni skalarni proizvod u $\mathbb{R}^3$ i od kojih je jedan invarijantan u odnosu na $\mathcal{A}$. Mogu li biti oba?

Rj:

i) $\det(A - xE)$

$$\begin{vmatrix} 4-x & -2 & 2 \\ 2 & -x & 2 \\ -1 & 1 & 1-x \end{vmatrix} = -x(4-x)(1-x) + 4 + 4 - 2x - 2(4-x) + 4(1-x) =$$

$$\underbrace{4 - 4x}_{} = 4(1-x)$$

$$= \ldots = (1-x)(-4x + x^2 + 4) =$$

$$= (1-x)(x-2)^2$$

$(1-\lambda)(\lambda-2)^2 = 0$

$\lambda_1 = 1$

$\lambda_2 = 2 = \lambda_3$

$\lambda_1 = 1$

$A v_1 = v_1$

$(A - E) v_1 = 0$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = 0$$

$3\xi_1 - 2\xi_2 + 2\xi_3 = 0 \Rightarrow \xi_1 + 2\xi_3 = 0$

$2\xi_1 - \xi_2 + 2\xi_3 = 0 \Rightarrow \xi_1 = -2\xi_3$

$-\xi_1 + \xi_2 = 0 \Rightarrow \xi_1 = \xi_2$

$\xi_3 = -1$

$\xi_1 = 2 = \xi_2$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$v_2 , \lambda_3 = 2$

$A v_2 = 2 v_2$

$(A - 2E) v_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\xi_1 - \xi_2 + \xi_3 = 0$

$\xi_1 = 1 \quad \xi_3 = 0$

$\xi_2 = 1$

$\xi_1 = 0 , \xi_3 = 1 \quad \xi_2 = 1$

$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ | to su vekt. koji odgovaraju svoj. vr.

$x_2 = x_3 = 2$

ii)
$$P = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} v_1 & v_2 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$P^{-1} = \dots$ sam!

$$P^{-1}AP = \dots = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

iii)
$[v_1]$

svojstv. pr. generisani ovim vekt.

$[v_2, v_3]$

iv) $\{0\}$, R^3, pr. gen. v. $[v_1]$, $[v_2]$, $[v_3]$

$[v_2, v_3]$

Pretp. da postoji još jedan prostor gen. v. $[y]$ koji je invar. u odnosu na A.

To znači $A(y) \in [y]$ $y \neq \vec{0}$

$A(y) = \lambda y$ => y -> svojstv. vekt. op. A.

a to znači da A nema drugih jednodim. podpr. osim navedena 3.

Slično op. A nema invar. prostora dim. 2 izuzev $[v_2, v_3]$

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Tražimo x tako da je

$$x \cdot v_1 = 0$$

$$x = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

$$2a + 2b - c = 0$$

$$c = 2a + 2b$$

$a = 0 \quad b = 1 \quad c = 2$

$a = 1 \quad b = 0 \quad c = 2$

Dakle potpr. $T = \{u_1, u_2\}$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$v_1 S = L(T)$ tj. $T = S^{\perp}$

Dakle $S \oplus T = R^3$

(treba samo provj. da li su u_1, u_2 i v_1 lin. nez.)

ortogonalni

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 4 + 1 = 9 \neq 0$$ dakle vekt. ne leže u istoj ravni i da su lin. nez.

baza pr. R^3

ako su oba vekt. invar. u odnosu na $\mathcal{A}$ onda imamo

$[v_2, v_3]$ i $[v_1]$ i jasno je

$[v_2, v_3] \oplus [v_1] = \mathbb{R}^3$

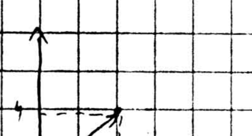
$v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$v_1 \cdot v_2 = (1,1,0)(2,2,-1) = 4 \neq 0$ nisu ortogonalni.

Prema tome $\mathbb{R}^3$ se ne može napisati kao direktna suma dva podprostora tako da su oba invarijantna u odnosu na $\mathcal{A}$

*) Da li se na vekt. pr. $\mathbb{R}^2$ može uvesti skalarni proizvod tako da je $\|\overset{u}{(0, 2)}\| = \|\overset{v}{(4, 4)}\|$



$\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$\langle \overset{u}{(x_1, x_2)}, \overset{v}{(y_1, y_2)} \rangle = x_1 y_1 + 5 x_2 y_2 - 4(x_1 y_2 + x_2 y_1)$

$\|(0,2)\| = \langle (0,2), (0,2) \rangle = 0 + 5 \cdot 4 - 4 \cdot 0 = 20$

$\|(4,4)\| = \langle (4,4), (4,4) \rangle = 4 \cdot 4 + 5 \cdot 4 \cdot 4 - 4 \cdot \underbrace{(4 \cdot 4 + 4 \cdot 4)}_{2 \cdot 4 \cdot 4} = -2 \cdot 16,$

nije dobro def. skalarni proizvod

Nepravilno...

$$\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = 5x_1y_1 + 4x_2y_2 - (x_1y_2 + x_2y_1)$$

zadovoljava uvjet zad. $\left(\|(0,2)\| = \|(5,4)\| \right)$

i) $\langle x,x\rangle = 5x_1^2 + 4x_2^2 - 4(x_1x_2 + x_1x_2) = \dots = 4\left(x_2 - \frac{x_1}{2}\right)^2 + x_1^2 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$

$\langle x,x\rangle = 0 \Rightarrow x = 0$

ii) očigledno

iii)

$$\langle (x_1,x_2) + (y_1,y_2),(z_1,z_2)\rangle = \langle (x_1+y_1, x_2+y_2),(z_1,z_2)\rangle =$$

$$= \dots\dots = \langle (x_1,x_2),(z_1,z_2)\rangle + \langle (y_1,y_2),(z_1,z_2)\rangle$$

iv) $\langle \alpha(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = \alpha\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle$ lahko

*) Ako je $A = \begin{bmatrix} -1 & 6 & -9 \\ -11 & 24 & -33 \\ -6 & 12 & -16 \end{bmatrix}$ dokazati da je

$A^4 = 85A - 114E$, a zatim izraziti A^n u

obliku $a_n A + b_n E$, $n = 1, 2, \ldots$

R:

Nađimo najprije karakt. pol. matrice A

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 6 & -9 \\ -11 & 24-\lambda & -33 \\ -6 & 12 & -16-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(24-\lambda)(-16-\lambda) + 6\cdot 6\cdot 33 +$$

$$+ 9\cdot 11\cdot 12 - 6\cdot 9(24-\lambda) + 11\cdot 6(-16-\lambda)$$

$$+ 33\cdot 12(-1-\lambda) =$$

$$= (1+\lambda)(24-\lambda)(16+\lambda) + \underbrace{6\cdot 6\cdot 33 + 6\cdot 6\cdot 33}_{6\cdot 6\cdot 6\cdot 11} - 6\cdot 9(24-\lambda)$$

$$- 11\cdot 6(16+\lambda) - \underbrace{33\cdot 6\cdot 2}_{6\cdot 6\cdot 11}(1+\lambda) =$$

$$= 6\cdot 6\cdot 11(6 - 1 + \lambda) - 6(9\cdot 24 - 9\lambda + 11\cdot 16 + 11\lambda) +$$

$$+ (1+\lambda)(24-\lambda)(16+\lambda) =$$

$$= 6\cdot 6\cdot 11(\lambda + 5) - 6(2\lambda + 4\cdot 2\cdot 7\cdot 7) + \underbrace{(1+\lambda)(24-\lambda)(16+\lambda)}$$

$$= 6(66\lambda - 2\lambda) + 5\cdot \underbrace{6\cdot 6}_{3\cdot 2}\cdot 11 - 6\cdot 4\cdot 2\cdot 7\cdot 7 + \qquad =$$

$$= 6\cdot 64\lambda + 12(5\cdot 3\cdot 11 - 6\cdot 4\cdot 7\cdot 7) + \qquad =$$

$$= 6\cdot 8\cdot 8\lambda - \underbrace{6\cdot 2\cdot 3\cdot 337} - \lambda^3 + 22\lambda^2 + 32\lambda + \underbrace{16\cdot 24}_{4\cdot 4\cdot 6\cdot 4} =$$

$$= -\lambda^3 - 11748 + 22\lambda^2 + 416\lambda =$$

$$= (\lambda - 2)^2 (3 - \lambda)$$

Sada nam treba minimalni polinom, koji dijeli karakt.

Kandidati: $\lambda-2,\ \lambda-3,\ (\lambda-2)(\lambda-3),\ (\lambda-2)^2(\lambda-3)$

$$A-2 = \begin{vmatrix} -3 & 6 & -9 \\ -11 & 22 & -33 \\ -16 & 12 & -18 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{nije min. pol.}$$

$$A-3 = \begin{vmatrix} -4 & 6 & -9 \\ -11 & 21 & -33 \\ -16 & 12 & -19 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{nije min pol.}$$

$(A-2)(A-3) = 0$ to je min. pol.

$\mu_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-3) = \lambda^2 - 5\lambda + 6$

$A^4 = (A^2)^2 = (5A-6E)^2 = 25A^2 - 60A + 36E = 25(5A-6E) - 6A + 36E$

$= 125A - 60A - 150E + 36E = 65A - 114E$

$A^n = a_n A + b_n E$

$A^{n+1} = a_{n+1} A + b_{n+1} E$

$A^{n+1} = A(A^n) = A(a_n A + b_n E) = a_n A^2 + b_n A$

$a_{n+1} A + b_{n+1} E = a_n (5A - 6E) + b_n A = (5a_n + b_n) A - 6a_n E$

$a_{n+1} = 5a_n + b_n$

$b_{n+1} = -6a_n$

$a_{n+2} = 5a_{n+1} + b_{n+1} = 5a_{n+1} - 6a_n$

$\boxed{a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 0}$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$(\lambda - 2)(\lambda - 3) = 0$

$\lambda_1 = 2 \quad , \quad \lambda_2 = 3$

$a_n = c_1 \cdot 2^n + c_2 \cdot 3^n$

$n = 1 \qquad A^1 = 1 \cdot A \qquad a_1 = 1$

$n = 2 \qquad A^2 = 5A - 6E \quad \Rightarrow \quad a_2 = 5$

$1 = a_1 = c_1 \cdot 2 + 3 \cdot c_2$

$5 = a_2 = c_1 \cdot 4 + 3 c_2$

$c_2 = 1$

$c_1 = -1$

$a_n = -2^n + 3^n$

$b_{n+1} = -6(-2^n + 3^n) = 3 \cdot 2^{n+1} - 2 \cdot 3^{n+1}$

$b_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n$

$A^n = (-2^n + 3^n) A + (3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n) E$

*Neka je $\lambda_0 \in K$ svoj. vr. matrica A i $A \in K^{n \times n}$ a $B = A - \lambda_0 E$. Dok. da je $B \cdot \hat{B} = O$ pa odatle zaključiti da rezultat kolone matrica $\hat{B}$ predst. svojstv. vekt. matrice A koji odgovaraju svojstvene vr. λ_0

Na taj način odrediti svojstv. vekt. matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 2 & 7 & -5 \\ -4 & 4 & -8 \end{bmatrix}$$

R:

$B = A - \lambda_0 E$

$B \hat{B} = \det(B) \cdot E$

$B \hat{B} = \det(A - \lambda_0 E) \cdot E$

$\det(A - \lambda_0 E) = 0 \Rightarrow$

$B \hat{B} = O$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \vdots & & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

$$(A-\lambda_0 E) \quad \begin{vmatrix} \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{vmatrix} = 0$$

$$b_j = \begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}$$

$(A-\lambda_0 E)\, b_j = 0$

$A b_j - \lambda_0 b_j = 0$

$A b_j = \lambda_0 b_j \qquad b_j \neq 0$

$\Rightarrow$ b_j svoj. vekt. matrice A koji odgovara sv. vr. λ_0

$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 8 & -7 \\ 2 & 7-\lambda & -5 \\ -4 & 4 & -8-\lambda \end{vmatrix} = \dots = \lambda(\lambda-9)(\lambda+9)$$

za $\lambda = 9$

$$B = A - 9E = \begin{bmatrix} -8 & 8 & -7 \\ 2 & -2 & -5 \\ -4 & 4 & -17 \end{bmatrix}$$

$B_{11} = 34 + 20 = 54$

$B_{12} = -(-34-20) = 54$

$B_{13} = (8-8) = 0$

B ostale ne moramo računati jer je r_{k}

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 54 & & \\ 54 & & \\ 0 & & \end{bmatrix}$$

$$b_{11} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Na isti način i za ostale λ.

*) Ako je $\mathcal{A}$ endom. pr. X a $\dim X = n < \infty$ i

$f(\lambda) \in K[\lambda]$
(prsten polinoma u promj. λ sa koefic. iz K)

neki zadani polinom i $\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$

Ako postoji baza $\{x_1, \dots, x_n\}$ prostora X sastavljena od svojstvenih vekt. lin. transf. $\mathcal{A}$, dok. da su to ujedno svoj. vekt. lin. transf. $\mathcal{B}$ i da je rang $\mathcal{A}$ = rang $\mathcal{A}^k$ $\forall k \in \mathbb{N}$

Rj:
Neka su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ svoj. vr. operatora $\mathcal{A}$ koje odg. svoj. vekt. $x_1, \dots, x_n$

$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda^k$

$\mathcal{B}(x_i) = f(\mathcal{A})(x_i) =$

$= \left(\sum_{k=0}^{m} a_k \mathcal{A}^k\right)(x_i) =$

$\mathcal{A}(x_i) = \lambda_i x_i$ vektor

$= \sum_{k=0}^{m} a_k \mathcal{A}^k(x_i) =$

$\mathcal{A}^2(x_i) = \mathcal{A}(\mathcal{A}(x_i)) =$
$= \mathcal{A}(\lambda_i x_i) = \lambda_i^2 x_i$

$= \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_i^k x_i =$

$\mathcal{A}^k(x_i) = \lambda_i^k x_i$

$= x_i \sum_{k=0}^{m} a_k \lambda_i^k = x_i f(\lambda_i) \Rightarrow$ vektor skalar

$\Rightarrow x_i$ je svoj. vekt. transf. $\mathcal{B}$ koji odgovara svoj. vr. $f(\lambda_i)$

U bazi $\{x_1, \dots, x_n\}$ transf. $\mathcal{A}$ odgovara matrica

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Transf. $\mathcal{A}^k$ odgovara matrica

$$\begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix}$$

Rang transf. $\mathcal{A}$ je $\operatorname{rang} \mathcal{A}$ = broj el. na dijagonali $\neq 0$ tj. = broj svoj. vr. transf. $\mathcal{A} \neq 0$ zajedno sa njihovom višestrukošću

Ako je $\lambda_l = 0$, $n \geq l > m \Rightarrow \operatorname{rang} \mathcal{A} = m$

$\lambda_i \neq 0 \quad 1 \leq i \leq l$, $\lambda_l^k = 0$,

$n \geq l > m \quad \forall k \in N$

$\lambda_i^k \neq 0$
$1 \leq i \leq l$

$\operatorname{rang} \mathcal{A}^k = m$ tj. $\operatorname{rang} \mathcal{A} = \operatorname{rang} \mathcal{A}^k \quad \forall k \in N$

*/ Neka je $n \in N$

a $A = (\alpha_k^j) \in K^{n \times n}$ matrica

Ako je $(\xi^1, \dots, \xi^n)$ svoj. vekt. matrice A

koji odgovara svoj. vr. λ_0 a $|\xi^k| = \max |\xi^j|$

Dok. da je $|\lambda_0 - \alpha_k^k| \leq \sum_{j \neq k} |\alpha_k^j|$

Na osnovu toga naći 3 kruga u kompleksnoj ravni unutar kojih leže svoj. vr. matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Rj:

Neka je λ_0 svoj. vr. mat. A i neka je $[\xi^1, \dots, \xi^n]^T$ svoj. vekt. koji odg. λ_0

Znači: $(A - \lambda_0 E)(x_0) = 0$

$$(A - \lambda_0 E) \begin{bmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{bmatrix} = 0$$

Neka je $|\xi^k| = \max_{1 \leq j \leq n} |\xi^j|$

$$(\alpha_k^k - \lambda_0) \xi^k + \sum_{j \neq k} \alpha_k^j \xi^j = 0$$

$$\sum_{j \neq k} \alpha_k^j \xi^j = (\lambda_0 - \alpha_k^k) \xi^k$$

$$\lambda_0 - \alpha_k^k = \sum_{j \neq k} \alpha_k^j \xi^j$$

$$|\lambda_0 - \alpha_k^k| = \left| \sum_{j \neq k} \alpha_k^j \frac{\xi^j}{\xi^k} \right| \leq \sum_{j \neq k} |\alpha_k^j| \underbrace{\frac{|\xi^j|}{|\xi^k|}}_{\leq 1} \leq$$

$$\leq \sum_{j \neq k} |\alpha_k^j|$$

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 3 \\ 2 & 3-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \cancel{(1-\lambda)(3-\lambda)(2-\lambda) + 6 + 6 - 8 + 4\lambda}$$

$$\cancel{-1 + \lambda - 9 + 9\lambda} =$$

$$\cancel{= 14\lambda - 18} \ldots = -(\lambda - 6)(\lambda - \sqrt{3})(\lambda + \sqrt{3})$$

$\lambda_1 = 6$

$\lambda_2 = \sqrt{3}$

$\lambda_3 = -\sqrt{3}$

$\lambda_1 = 6$, $\xi_1 = 1 \Rightarrow x_1$

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$|\lambda_0 - 1| \leq 5$$

$\lambda_2 = \sqrt{3}$, $x_2 = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$ analogno

$(A - \lambda E)$

$\lambda_3 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$

*) Dana je matrica

$$A = \begin{bmatrix} -1/3 & -2/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2/3 & -2/3 & 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Odrediti karakt. pol. matrice A

ii) na osnovu i) odrediti karakt. pol. matrice $A^2 + E$

Rj:

i)

$$\det(\lambda E - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1/3 & -2/3 & -2/3 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 1 \\ 2/3 & -2/3 & \lambda - 1/3 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & -2/3 & \lambda \end{vmatrix} = \dots$$

$$= \frac{1}{3}\left(3\lambda^4 + 2\lambda^2 + 3\right)$$

$$f(\lambda) = \lambda^4 + \frac{2}{3}\lambda^2 + 1$$

$$\det(\lambda E - (A^2 + E)) = \det((\lambda - 1)E - A^2) = \det(\sqrt{\lambda - 1}\,E - A)(\sqrt{\lambda-1}\,E + A) =$$

$$= \det(\sqrt{\lambda - 1}\,E - A) \cdot \det(\sqrt{\lambda - 1}\,E + A) = f(\sqrt{\lambda - 1}) \cdot (-1)^4 \cdot$$

$$\cdot \det(-\sqrt{\lambda - 1}\,E - A) =$$

$$= f(\sqrt{\lambda - 1}) \cdot f(-\sqrt{\lambda - 1}) = f^2(\sqrt{\lambda - 1}) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(3(\lambda - 1)^2 + 2(\lambda - 1) + 3\right)^2$$

*) Dok. Keli-Hamiltonov tm. tj. dok. da je svaka matrica nula svog karakt. pol.

Rj:

A $n \times n$

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$$

$$\det(\lambda E - A) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$$

$$B = \lambda E - A$$

$\hat{B}$ - asocirana mat. B (adjungovana)

$\hat{B} = \lambda^{n-1} B_{n-1} + \dots + B_0$ gdje su $B_{n-1}, \dots, B_0 \in K^{n \times n}$

$$B \cdot \hat{B} = \det(B) \cdot E$$

$$B \cdot \hat{B} = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k \cdot E$$

$$(\lambda E - A)(\lambda^{n-1} B_{n-1} + \dots + B_0) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k E$$

$$\lambda^n B_{n-1} + \lambda^{n-1}(B_{n-2} - AB_{n-1}) + \lambda^{n-2}(B_{n-3} - AB_{n-2}) + \dots$$

$$+ \lambda (B_0 - AB_1) - B_0 A = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k E$$

$B_{n-1} = a_n E$

$B_{n-2} - AB_{n-1} = a_{n-1} E$

$\vdots$

$B_0 - AB_1 = a_1 E$

$-AB_0 = a_0 E$

$+ \ldots \quad f(A) = 0$

*) Dok. da ako su tragovi matrica

$A, A^2, \ldots, A^n = 0$ Onda je matrica A nilpotentna

$(\exists n \in \mathbb{N}: A^n = 0) \Rightarrow A \in K^{n \times n}, A^n = 0$

R:

$tr A = 0$

$tr A^2 = 0$

$\vdots$

$tr A^n = 0 \Rightarrow A$

Pos. ako ... A ... svoj. vekt.

$\{x_1, \ldots, x_n\}$

$(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$\{e_1, \ldots, e_n\} \longrightarrow \{x_1, \ldots, x_n\}$

$P^{-1} A P = \bar{A}$

$tr(P^{-1}AP) = tr(P^{-1}) \cdot \underbrace{tr A}_{0} \cdot tr P = 0$

$tr A = 0$

$tr A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n = 0$

$tr A^2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 = 0$

$\vdots$

$tr. A^n = \lambda_1^n + \dots + \lambda_n^n = 0$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 0$

$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i^n = 0$

$\det(\lambda E - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n$

$a_1 = tr A$

$a_n = \det A$

$f(x) = x^n + \dots + a_n$, $x_1, \dots x_n$ - nk pol. $f(x)$

$a_n = x_1 \dots x_n$

$a_{n-1} = (-1)^{4} \sum (x_1 \dots x_n)$

$\vdots$

$a_1 = (-1)^{n-1} \sum x_i$

$a_2 = (tr A)^2 - tr A^2 = \lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2 + 2(\lambda_1\lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1}\lambda_n) -$

$-(\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2)$

$= 0$

$a_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \dots + \lambda_{n-2}\lambda_{n-1}\lambda_n = 0$

primjena vijetovih pravila : $\Rightarrow$ $a_n = 0$

to znači $\det(\lambda E - A) = \lambda^n$ $\Rightarrow$

0 je netrovna svoj. vrij. od A pa rang $A^n = 0$

tj. $A^n = 0$.

Ako su A i $B \in K^{n \times n}$ i $C = AB - BA$, dok.

da je C nilpotentna.

(primijeniti zadnji zad.)

1) Ako je $\mathcal{A}$ normirana lin. transf. kompleksnog unitarnog prostora X konačne dimenzije n za koji postoji ortonormirana baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ sastavljena od svojstvenih vektora lin. transf. $\mathcal{A}$. Da li vrijedi obrnuta tvrdnja?

Rj: Vrijedi obrat tvrdnje

Ako je $\mathcal{A}$ lin. transf. kompleks. unitarnog prostora X konačne dim. n za koji postoji ortonorm. baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ sastavljena od svojstvenih vekt. transformacije $\mathcal{A}$, onda je $\mathcal{A}$ normalna transf., tj. vrijedi $\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^* = \mathcal{A}^* \circ \mathcal{A}$. Uzmimo, neka je $\{f_1, \ldots, f_n\}$ ortonorm. baza svojstvenih vektora transf. $\mathcal{A}$. To znači da je $\mathcal{A}(f_i) = \lambda_i f_i$, $i = \overline{1,n}$, a λ_i su svoj. vr. koje odgovaraju svoj. vekt.

$\langle f_i, f_j \rangle = \delta_{ij} \quad i,j = \overline{1,n}$

Nađimo $\mathcal{A}^*(f_i) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k$

Pošto je $\langle \mathcal{A}(x), y \rangle = \langle x, \mathcal{A}^*(y) \rangle \quad \forall x, y \in X$

$\langle \mathcal{A}^*(f_i), f_j \rangle = \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k, f_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \langle f_k, f_j \rangle =$

$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \delta_{kj} = \alpha_j$

S druge strane imamo:

$\langle \mathcal{A}^*(f_i), f_j \rangle = \langle f_i, \mathcal{A}(f_j) \rangle = \langle f_i, \lambda_j f_j \rangle = \overline{\lambda_j} \langle f_i, f_j \rangle =$

$= \overline{\lambda_j}\, \delta_{ij} = \overline{\lambda_i}$

Dakle $\alpha_{ki} = 0$ ako je $k \neq i$ i $\alpha_i = \overline{\lambda_i}$

Dakle $\mathcal{A}^*(f_i) = \overline{\lambda_i} f_i \qquad \forall i = \overline{1,n}$

Uzmimo sada proizvoljan vekt. $x \in X$, i $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i$

(prikaz u bazi). Posmatrajmo sad:

$(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A})(x) = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}(x)) = \mathcal{A}^*\left(\mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right)\right) =$

$= \mathcal{A}^*\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathcal{A}(f_i)\right) = \mathcal{A}^*\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i f_i\right) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \mathcal{A}^*(\beta_i \lambda_i f_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i \overline{\lambda_i} f_i = \sum_{i=1}^{n} \beta_i |\lambda_i|^2 f_i$

Analogno je

$(\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*)(x) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^*(x)) = \mathcal{A}\left(\mathcal{A}^*\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right)\right) =$

$= \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathcal{A}^*(f_i)\right) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \overline{\lambda_i} f_i\right) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \beta_i |\lambda_i|^2 f_i \qquad \forall x \in X$

Dakle, $(\mathcal{A}^* \circ \mathcal{A})(x) = (\mathcal{A} \circ \mathcal{A}^*)(x) \qquad \forall x \in X$

pa to znači da je $\mathcal{A}$ normalna lin. op.

2) Ako je A normalna matrica reda n, tada postoji unitarna matrica P i dijagonalna matrica B za koje vrijedi $B = P^* A P$. Da li vrijedi

Vrijedi zbog ...

Ako za matricu A postoji dijagonalna matrica

B i unitarna matr. P takve da vrijedi $B = P^{*} A P$

onda je A ortog. matrica jer je $A = (P^{*})^{-1} B P^{-1}$

Pošto je $P^{-1} = P^{*}$ to je $A = P B P^{*}$ pa je

$A^{*} = (P B P^{*})^{*} = (P^{*})^{*} B^{*} P^{*} = P B^{*} P^{*} = P \bar{B} P^{*}$

Pošto je $B^{*} = \bar{B}^{T}$ (jer je dijagonal...)

Sad je $A A^{*} = (P B P^{*})(P \bar{B} P^{*}) = P B (P^{*} P) \bar{B} P^{*} =$

$\underset{=}{P^{*} = P^{-1}}$ $P B \bar{B} P^{*}$

$A^{*} A = (P \bar{B} P^{*})(P B P^{*}) = P \bar{B} (P^{*} P) B P^{*} =$

$= P \bar{B} B P^{*} \overset{B\bar{B} = \bar{B}B}{=\!=} $ (jer je dijagonalna)

Pošto dijagonalne matrice komutiraju tj. $B\bar{B} = \bar{B}B$

tako da je $A^{*} A = A A^{*}$

3.) Ako je A simetrična transf. realnog unitarnog prostora X konačne dim n tada postoji ortonormirana baza $\{f_1, \ldots, f_n\}$ od X sastavljena od svojstv. vekt. transf. A. Dok. da važi i obratna tvrdnja.

Rj:

Neka je proizvoljna ortonorm. baza ... e_i ...

(nekog) na postupak ortonormiranja. Bazu $\{f_1, \dots, f_n\}$ pr. X sastavljenu od svojstv. vekt. tra.sf. A. Neka u odnosu na prvobitnu bazu transformaciji A odgovara matrica A a u odnosu na drugu bazu pretp. da joj odgovara matrica B. B je prema tome dijagonalna matrica, na čijoj dijagonali su svojstv. vrijednosti pridružene vektorima $f_1, \dots, f_n$ redom i za matricu A vrijedi $B = P^{-1}AP$, gdje je P matrica prelaza sa baze $\{e_1, \dots, e_n\}$ na bazu $\{f_1, \dots, f_n\}$. Kako su obje baze ortonorm.. to je P ortog. matrica tj. $P^T = P^{-1}$. Pošto su realne pr. A je i $P^* = P^{-1}$ pa je ovo unitarna matrica.

Dakle za matricu A postoji dijagonalna matrica B i unitarna matrica P takve da je $B = P^* A P$ pa na osnovu preth. zad zaključujemo da je A normalna matrica. Pošto je X realan pr. normalna matrica je simetrična. To znači da je lin. tra.sf. A simetrična.

4) Neka je A pozitivna (semi definitna) lin. transf. unitarnog prostora X konačne dim. nad poljem K

jedna lin. transf. $\mathcal{B}$ p. X za koju vrijedi $\mathcal{A} = \mathcal{B}^2$ i da postoji polinom $f(\lambda) \in K[\lambda]$ (prsten polinoma u promjenjivoj λ sa koefic. iz K) čiji stupanj ne prelazi broj različitih svoj. vrij. transf. $\mathcal{A}$ takav da je $\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$

Rj:

$\mathcal{A}$ je poz. semidefin. ako su joj sve vrijednosti nenegativ.

Pošto je $\mathcal{A}$ (semi) definitna $\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ je simetrična pa postoji ortonormirana baza $\{f_1, \dots, f_n\}$ prostora X sastavljena od svojstv. vektora transf. $\mathcal{A}$ tj. u toj bazi vrijedi $\mathcal{A}(f_i) = \lambda_i f_i$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$

Ako je $\mathcal{A}$ poz. definitna $\Rightarrow \lambda_i > 0 \ \forall i = \overline{1,n}$, a ako je poz. semi. def. $\Rightarrow \lambda_i \geq 0 \ \forall i = \overline{1,n}$.

Definišimo transf. $\mathcal{B}$ sa $\mathcal{B}(f_i) = \sqrt{\lambda_i} f_i \ \forall i = \overline{1,n}$

$\forall x \in X$ imamo $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i$, pa je $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i) = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \lambda_i f_i$. Takođe je $\mathcal{B}^2(x) = \mathcal{B}(\mathcal{B}(x)) =$

$$= \mathcal{B}(\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathcal{B}(f_i)) = \mathcal{B}(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} \beta_i f_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\lambda_i} \sqrt{\lambda_i} \beta_i f_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \beta_i f_i = \mathcal{A}(x)$$

Jasno je da je $\mathcal{B}$ lin. preslikavanje i da je dobro dokazan. egzist. traženog presl. $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ je

takođe pozitivna (semi)definitna transf. jer

$\lambda_i > 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_i} > 0$ $(\lambda_i \geq 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda_i} \geq 0)$

Dok. sada jedinstvenost ovakve transf.

Pretp. da postoji još jedna pozitivna, odnosno

poz. semidef. transf. $\mathcal{B}'$ takva da je $\mathcal{A} = \mathcal{B}'^2$

Pošto je $\mathcal{B}'$ pozitivna (poz. semidef.) to postoji

ortonormirana baza sastavljena od svoj. vekt. te transf.

$\{e_1, \dots, e_n\}$. U svoj bazi imamo $\mathcal{B}'(e_i) = \mu_i e_i$, $i = \overline{1,n}$

$\mathcal{B}'^2(e_i) = \mathcal{B}'(\mathcal{B}'(e_i)) = \mu_i^2 e_i$, $\forall i = \overline{1,n}$

Pošto je $\mathcal{B}'^2 = \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{A}(e_i) = \mu_i^2 (e_i)$ $\forall i = \overline{1,n}$

što znači da su e_i svoj. vekt. transf. $\mathcal{A}$ pa onda

mora biti $\mu_i^2 = \lambda_i$ (uz eventualnu prenumeraciju)

tj. $\mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ i $e_i = f_i$ pa je tada $\mathcal{B}'(f_i) = \mathcal{B}(f_i)$

$\forall i$, pa je $\mathcal{B}$ jedinstvena za ovaj zadatak

Pretp. da su $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ različite svoj. vr. transf.

$\mathcal{A}$. Za traženi polinom $f(\lambda)$ možemo uzeti

Lagrangeov interpolacioni polinom: $f(\lambda) \stackrel{def}{=} \sum_{l=1}^{k} \sqrt{\lambda_l} \cdot \prod_{l \neq j} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_l - \lambda_j}$

Sada je lako proveriti da ovaj pol. zadovoljava $\mathcal{B} = f(\mathcal{A})$)

pr. X. Dok:

a) $\mathcal{S}+\mathcal{E}$, gdje je $\mathcal{E}$ identičko presl., regularan operat

b) da je $\mathcal{B}=(\mathcal{S}+\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{E}-\mathcal{S})$ unitaran operator

Rj:

Op. $\mathcal{S}$ je koso simetričan, što znači da su njegove svoj. vr. imaginarne.

a) Trebamo pokazati da je $\ker(\mathcal{S}+\mathcal{E})=0$

$\ker(\mathcal{S}+\mathcal{E})=\{x\in X : (\mathcal{S}+\mathcal{E})(x)=0\}=\{x\in X : \mathcal{S}(x)+\mathcal{E}(x)$

$=\{x\in X : \mathcal{S}(x)=-x\}=\{0\}$ jer: x je svoj. vekt. od $\mathcal{S}$ koji odgovara svoj. vr. -1. Ovo je nemoguće osim ako je $x=0$ jer su svoj. vr. od $\mathcal{S}$ imaginarne pa je $\ker(\mathcal{S}+\mathcal{E})=\{0\}$.

Dakle $\mathcal{S}+\mathcal{E}$ je regularna transf. (ustvari pokazali smo da je $\mathcal{S}+\mathcal{E}$ injektivno)

b) Treba pokazati da je $\mathcal{B}^*=\mathcal{B}^{-1}$

$\mathcal{B}^{-1}=((\mathcal{S}+\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{S}-\mathcal{E}))^{-1}=(\mathcal{S}-\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{S}+\mathcal{E})$

$\mathcal{B}^*=[(\mathcal{S}+\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{S}-\mathcal{E})]^*=(\mathcal{S}-\mathcal{E})^*[(\mathcal{S}+\mathcal{E})^*]^{-1}=$

$=(\mathcal{S}^*-\mathcal{E}^*)(\mathcal{S}^*+\mathcal{E}^*)^{-1}=(-\mathcal{S}-\mathcal{E})(-\mathcal{S}+\mathcal{E})^{-1}=$

$=(\mathcal{S}+\mathcal{E})(\mathcal{S}-\mathcal{E})^{-1}=(\mathcal{S}-\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{S}-\mathcal{E})(\mathcal{S}+\mathcal{E})(\mathcal{S}-\mathcal{E})^{-1}=$

$$= (\mathcal{S}-\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{S}+\mathcal{E})(\mathcal{S}-\mathcal{E})(\mathcal{S}-\mathcal{E})^{-1} = (\mathcal{S}-\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{S}+\mathcal{E}) = \mathcal{B}^{-1}$$

Dakle $\mathcal{B}$ je unitaran operator.

Ovdje smo koristili da postoji $(\mathcal{S}-\mathcal{E})^{-1}$ pa

treba dokazati da je i ovaj operator regularan!

$Ker(\mathcal{S}-\mathcal{E}) = \{x \in X : (\mathcal{S}-\mathcal{E})(x) = 0\} = \{x \in X : \mathcal{S}(x) = x\} =$

$= \{0\}$ jer su svoj. vr. transf. $\mathcal{S}$ imaginarne

pa ne može biti $\mathcal{S}(x) = x$.

B) Neka je $\mathcal{K}$ kososimetričan operator unitarnog

vekt. pr. X dim. n

i) Dok. da je operator $\mathcal{K} - 3\mathcal{E}$ regularan

ii) Dok. da je $\mathcal{U} = (\mathcal{K}-3\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{K}+3\mathcal{E})$ unitaran operator

koje ni jedna svoj. vrij. nije jednaka 1.

iii) Izraziti op. $\mathcal{K}$ preko op. $\mathcal{U}$

Rj:

i) $Ker(\mathcal{K}-3\mathcal{E}) = \{x \in X : (\mathcal{K}-3\mathcal{E})(x) = 0\} = \{x \in X : \mathcal{K}(x) = 3x\} =$

$= \{0\}$ jer $\mathcal{K}$ nema realne svoj. vr. Dakle

operator $\mathcal{K}-3\mathcal{E}$ je regularan pa postoji $(\mathcal{K}-3\mathcal{E})^{-1}$.

ii) Treba pokazati $\mathcal{U}^{-1} = \mathcal{U}^*$

$\mathcal{U}^* = [(\mathcal{K}-3\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{K}+3\mathcal{E})]^* = (\mathcal{K}+3\mathcal{E})^* ((\mathcal{K}-3\mathcal{E})^{-1})^*$

$= (\mathcal{K}^* + 3\mathcal{E}^*)(\mathcal{K}^* - 3\mathcal{E}^*)^{-1} =$ (pošto je $\mathcal{K}^* = -\mathcal{K}$ jer je $\mathcal{K}$ koso sim. operator) $= (-\mathcal{K} + 3\mathcal{E})(-\mathcal{K} - 3\mathcal{E})^{-1} =$

$= (\mathcal{K} - 3\mathcal{E})(\mathcal{K} + 3\mathcal{E})^{-1} = (\mathcal{K} + 3\mathcal{E})^{-1} \underbrace{(\mathcal{K} + 3\mathcal{E})(\mathcal{K} - 3\mathcal{E})}_{\text{komutiraju}} \cdot$

$\cdot (\mathcal{K} + 3\mathcal{E})^{-1} = (\mathcal{K} + 3\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{K} - 3\mathcal{E})(\mathcal{K} + 3\mathcal{E})(\mathcal{K} + 3\mathcal{E})^{-1}$

$= (\mathcal{K} + 3\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{K} - 3\mathcal{E}) = \mathcal{U}^{-1} \Rightarrow \mathcal{U}$ je

unitaran operator.

Pretp. da je 1 jedna od svoj. vr. operatora $\mathcal{U}$ i neka je v vektor koji odgovara ovoj svoj. vr.

Imamo da je $\mathcal{U}(v) = v$ tj. $(\mathcal{K} - 3\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{K} + 3\mathcal{E})(v) = v$

$(\mathcal{K} + 3\mathcal{E})(v) = (\mathcal{K} - 3\mathcal{E})(v) \Rightarrow \mathcal{K}(v) + 3v = \mathcal{K}(v) - 3v \Rightarrow$

$6v = 0 \Rightarrow v = 0$ a to je nemoguće jer je sv. vekt. po def. $\neq 0$.

iii)

$\mathcal{U} = (\mathcal{K} - 3\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{K} + 3\mathcal{E})$

$(\mathcal{K} - 3\mathcal{E})\mathcal{U} = \mathcal{K} + 3\mathcal{E}$

$\mathcal{K}\mathcal{U} - 3\mathcal{U} = \mathcal{K} + 3\mathcal{E}$

$\mathcal{K}\mathcal{U} - \mathcal{K} = 3\mathcal{U} + 3\mathcal{E}$

$\mathcal{K}(\mathcal{U} - \mathcal{E}) = 3\mathcal{U} + 3\mathcal{E}$

$\mathcal{K} = (\mathcal{U} - \mathcal{E})^{-1}(3\mathcal{U} + 3\mathcal{E})$, ako je $\mathcal{U} - \mathcal{E}$ regularan op.

zbog (pod ii) dok. da ni jedna svoj. vr. nije jednaka 1, pa zaista $(\mathcal{U}-3\mathcal{E})^{-1}$ postoji.

Treba još pokazati da je $\mathcal{K}+3\mathcal{E}$ regularan operator. Ovo se pokazuje analogno kao $\mathcal{K}-3\mathcal{E}$.

7) Neka je $\mathcal{S}$ simetričan op. na unitarnom n-dimenzijalnom pr. V. Dokazati:

a) da su $\mathcal{S}-i\mathcal{E}$ i $\mathcal{S}+i\mathcal{E}$ regularni op.

b) da je $\mathcal{U}=(\mathcal{S}+i\mathcal{E})^{-1}(\mathcal{S}-i\mathcal{E})$ unitaran op. čija ni jedna svoj. vr. nije jednaka 1.

c) Izraziti $\mathcal{S}$ preko $\mathcal{U}$

Sam!!!

8) Šta se može reći o dijagonalizaciji matrice

$$A=\begin{bmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$$

(tj. da li i kada se ova matrica može dijagonalizirati)

Rj.

Nađimo svoj. vr.

$$\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}3-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & -5\\ 0 & 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=\ldots=(3-\lambda)(\lambda^2+1)$$

Razmotrimo sada 2 slučaja:

1° Posmatrajmo matricu A kao matricu nad poljem realnih brojeva. Tada matrica A ima samo

jedan svoj. vr. i to 3, jer polinom λ^2+1 nema

nule u polju R.

Dakle u ovom slučaju matricu A ne možemo

dijagonalizirati tj. ne možemo naći regularnu

matricu P tako da je $P^{-1}AP = B$ gdje je B

dijagonalna matrica

II Matricu A posmatramo nad poljem kompleksnih

br. i u ovom slučaju A ima 3 svoj. vr.

a to su 3, i, -i $\in \mathbb{C}$ pa postoji regularna

matrica $P \in \mathbb{C}^{3\times 3}$ za koju je $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{bmatrix} = P^{-1}AP$,

što znači da se A može dijagonalizirati.

9) Neka su $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ i $B: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ lin

Operatori za koje je $\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Ker}(B)$. Dok. da je

op. $A \circ A^T + B^T \circ B$ pozitivno definitan

Rj:

$\mathbb{R}^n \xrightarrow{A} \mathbb{R}^m \xrightarrow{A^T} \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^m \xrightarrow{B} \mathbb{R}^k \xrightarrow{B^T} \mathbb{R}^m$

Prema tome $A \circ A^T + B^T \circ B : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Ali

moramo dok. da je $\forall x \in \mathbb{R}^m$ $((A \circ A^T + B^T \circ B)(x) \geq$

1°) Mq. je $\langle (A\circ A^T + B^T\circ B)(x) = 0$ samo ako je $x = 0$

$< A\circ A^T + B^T\circ B(x), x > = \langle A\circ A^T(x), x > +$

$+ < B^T\circ B(x), x > \overset{A^T = A^*}{=} < A^T(x), A^T(x) > +$

$+ < (B^T)^T(x) > = < A^T(x), A^T(x) > + $

$+ < B(x), B(x) > \geq 0 \quad \forall x \in R^n$

posto je $\forall v \in X$, $<v, v> \geq 0$.

Uzmimo sada x tako da je

$< A^T(x), A^T(x) > + < B(x), B(x) > = 0 \implies$

$\implies A^T(x) = 0 \wedge B(x) = 0 \implies x \in Ker(B) = Im(A)$

sto znaci da postoji $y \in R^n$ takav da je $A(y) = x$.

Imamo $A^T(x) = A^T(A(y)) = 0$

Posmatramo sada $< A^T\circ A(y), y > = 0$, zbog

S druge str. je: $< A^T\circ A(y), y > = < A(y), (A^T)^T(y) >$

$= < A(y), A(y) > = 0 \implies A(y) = 0 \implies x = 0$ zbog

Dakle $\langle (A\circ A^T + B^T\circ B)(x), x \rangle = 0 \iff x = 0$

U suprotnom je > 0 pa je ova dva st.

pozitivno definitna.

10) Neka je $\dim V = n$ i neka je $A: V \to V$ invertibilan

operator. Dok. da je A^{-1} jednak polinomu po A

čiji je stepen manji od n.

Neka je $f(\lambda) = \lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + \ldots + a_m$ minimalni polinom matrice A. Pošto je $f(\lambda) \mid g(\lambda)$ gdje je $g(\lambda)$ karakteristični polinom matrice A to nam daje je $\deg(f(\lambda)) \leq n$

Osim toga, kako A je pp regularna što znači da nema svoj. vr. koje su $= 0$ pa 0 ne može biti korijen polinoma $f(\lambda)$ što znači da je $a_m \neq 0$.

Po Kelihamiltonovom th. imamo da je $f(A) = 0$

tj. $A^m + a_1 A^{m-1} + \ldots + a_m E = 0$ pa je

$A(A^{m-1} + a_1 A^{m-2} + \ldots + a_{m-1}E) = -a_m E \;/ : -a_m$

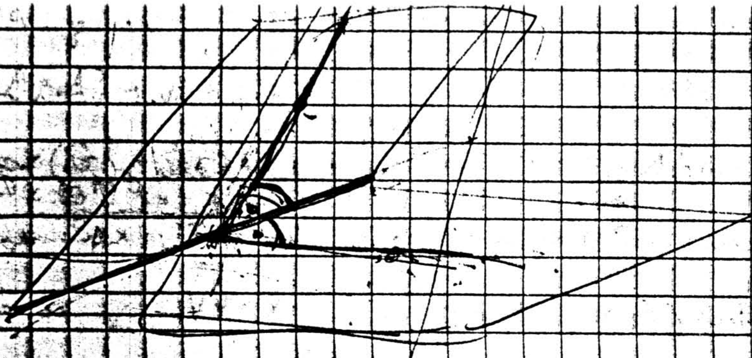
$A \circ \left(-\frac{1}{a_m}(A^{m-1} + a_1 A^{m-2} + \ldots + a_{m-1}E)\right) = E$

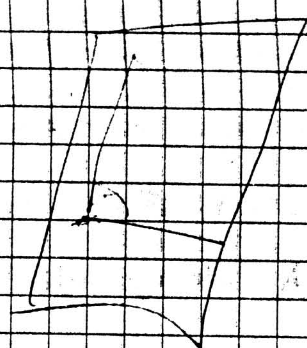
Zbog jedinstvenosti inverzne transformacije odavde

$A^{-1} = -\frac{1}{a_m}(A^{m-1} + a_1 A^{m-2} + \ldots + a_{m-1}E)$ pa je

A^{-1} polinom $h(\lambda) = -\frac{1}{a_m}(\lambda^{m-1} + a_1\lambda^{m-2} + \ldots + a_{m-1})$

tj. $A^{-1} = h(A)$, gdje je stepen polinoma h jednak $m-1 < n$ jer je $m \leq n$ pa smo pokazali ono što se traži!





A

Ti se ne javljaj

Omerović Lejla

<u>Teorema:</u> Neka je X normirani pr. čija norma zadovoljava pa tada je ovom rel. zadan skalarni proizvod na X.

<u>Dokaz:</u> E Iz E

Ako u (I)

Ako u X

$AA^T = E$, $BB^T = E$

$A+B$ и $A-B$

$\det(A+B)\det(A-B) = 0$

$(A-B)(A+B)^T = (A-B)(A^T+B^T) =$

$= AA^T + AB^T - BA^T - BB^T =$

$= \cancel{E} - \cancel{E} + AB^T - BA^T$

$(BA^T)^T = \cancel{B}AB^T$ $\quad AB^T$

$AB^T \cdot BA^T = E$

$2^n / 2^n - 1$, 1

$S_1' = \{1\}$

$S^n = \emptyset$

(...) 20.05.'04.

11) Neka je A pozitivna definitna sim. matrica.
Dokazati nejednakost $(\mathrm{tr} A)(\mathrm{tr} A^{-1}) \geq n^2$

Rj:

$\mathcal{A}$ je pozitivno def. lin. transf. što znači da postoji ortonorm. baza $\{f_1, \dots, f_n\}$ sastavljena od svoj. vektora transf. $\mathcal{A}$ koji odgovaraju svoj. vrijednostima $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Pošto je $\mathcal{A}$ poz. definitna, to je $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$.
Posmatramo sada matricu A u $\{f_1, \dots, f_n\}$
A je dijagonalna matrica.

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ & \lambda_2 & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \text{ pa je } A^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1} & & 0 \\ & \lambda_2^{-1} & \\ 0 & & \ddots \lambda_n^{-1} \end{bmatrix}$$

je $\mathrm{tr} A = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$, $\mathrm{tr} A^{-1} = \frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n}$
Sada $(\mathrm{tr} A)(\mathrm{tr} A^{-1}) \geq n^2$ prelazi u

$$(\lambda_1 + \dots + \lambda_n)\left(\frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n}\right) \geq n^2$$

$$\frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_n}{n} \geq \frac{n}{\frac{1}{\lambda_1} + \dots + \frac{1}{\lambda_n}}$$

Ovo je odnos aritmetičke i harmonijske sr.,
$A_n \geq H_n$ pa je naša nejednakost tačna.

2.) Neka je $\mathcal{A}$ poz. semidef. lin. transf. prostora X konačne dim. n. Dokazati da iz $\langle \mathcal{A}(x), x \rangle = 0$ slijedi da je $\mathcal{A}(x) = 0$.

Rj:

Pošto je $\mathcal{A}$ pozitivna semidef. lin. transf., to postoji ortonorm. baza sastavljena od svojstvenih vektora transf. $\mathcal{A}$ $\{f_1, \dots, f_n\}$ koji odgovaraju svoj. vrijednostima $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Znamo $\lambda_i \geq 0$ $\forall i = \overline{1,n}$

Bez ograničenja opštosti možemo pretp. da je $\lambda_1, \dots, \lambda_k = 0$ a da su ostale $\neq 0$ tj. strogo pozitivne. Uzmimo sada proizvoljan vektor $x \in X$. Pa možemo pisati $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i$. Imamo $\mathcal{A}(f_i) = \lambda_i f_i$ $\forall i = \overline{1,n}$

Posmatrajmo sada:

$$0 = \langle \mathcal{A}(x), x \rangle = \langle \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right), \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \rangle =$$

$$= \langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i f_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \rangle = (\text{pošto je prvih } k \ \lambda_i = 0) =$$

$$= \langle \sum_{i=k+1}^{n} \alpha_i \lambda_i f_i, \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \rangle = (\text{pošto je baza ortonorm.}) =$$

$$= \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i |\alpha_i|^2 \Rightarrow \sum_{i=k+1}^{n} \lambda_i |\alpha_i|^2 = 0 \Rightarrow |\alpha_i|^2 = 0$$

jer je $\lambda_i > 0$ tj. $\alpha_i = 0$ $i = \overline{k+1, n}$

To znači da je $\mathcal{A}(x) = \mathcal{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{A}(f_i) =$

$= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda_i f_i$, ~~za~~ $i = \overline{1, k} \Rightarrow \lambda_i = 0$ a za $\forall$

$i = \overline{k+1, n} \Rightarrow \alpha_i = 0$ pa je $\mathcal{A}(x) = 0$

(1) 25.03.'04.

1. Riješiti Dirichletov sistem jednačina koristeći Kronecker–Capelijevog stava:

$x+y+z=1$ $\quad a,b,c,d\in R$

$ax+by+cz=d$

$(b+a)(c-a) = -bc+ba-ac+a^2 \dots = (a-c)(b-c)$

A – matrica sist., $\bar{A}$ proširena matrica

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ a&b&c&d\\ a^2&b^2&c^2&d^2\\ \hline 1&0&0&\\ 0&1&0&\\ 0&0&1& \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&b-a&c-a&d-a\\ 0&b^2-a^2&c^2-a^2&d^2-a^2\\ \hline 1&0&0&\\ 0&1&0&\\ 0&0&1& \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1&1&1&1\\ 0&b-a&c-a&d-a\\ 0&0&(a-c)(b-c)&(b-d)(a-d)\\ \hline 1&0&0&\\ 0&1&0&\\ 0&0&1& \end{array}\right]$$

transf. kolona $\sim$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&1\\ 0&b-a&c-a&d-a\\ 0&0&(a-c)(b-c)&(b-d)(a-d)\\ \hline 1&-1&-1&\\ 0&1&0&\\ 0&0&1& \end{array}\right]$$

slučaj $b=a$ $\sim$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&1\\ 0&0&c-a&d-a\\ 0&0&(a-c)(a-c)&(a-d)(a-a)\\ \hline 1&-1&-1&\\ 0&1&0&\\ 0&0&1& \end{array}\right] \Rightarrow a=c \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&1\\ 0&0&0&d-a\\ 0&0&0&(d-a)^2\\ \hline 1&-1&-1&\\ 0&1&0&\\ 0&0&1& \end{array}\right]$$

$a=d \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&1\\ 0&0&0&0\\ 0&0&0&0\\ \hline 1&-1&-1&\\ 0&1&0&\\ 0&0&1& \end{array}\right]$$

rang A = 1 = rang $\bar{A}$ $\Rightarrow$ sist. ima rj. a to rješenje dat je sa (1)

(1) $\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&-1&-1\\ 0&1&0\\ 0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\ \lambda\\ \mu\end{bmatrix}$, $\lambda,\mu\in R$ $\rightarrow$ sist. nije određen (ima beskon. mnogo rj.)

$d\neq a \Rightarrow$ rang A = 1, rang $\bar{A}$ = 2 $\Rightarrow$ zbog rang A $\neq$ rang $\bar{A}$ sistem je nesaglasan protivrj. (nema rj.)

I $a=b$

1° $a=c$

$a=d$ sist. ima ∞ rj.

$a\neq d$ nema rj.

2° $a\neq c$

$a\neq d$ ∞ rj.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&1\\ 0&0&c-a&0\\ 0&0&(c-a)^2&0\\ \hline 1&-1&-1&\\ 0&1&0&\\ 0&0&1& \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&1\\ 0&0&c-a&0\\ 0&0&0&0\\ \hline 1&-1&-1&\\ 0&1&0&\\ 0&0&1& \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&1\\ 0&1&0&0\\ 0&0&0&0\\ \hline 1&\frac{-1}{c-a}&-1&\\ 0&0&1&\\ 0&\frac{1}{c-a}&0& \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ rang A = 2 = rang $\bar{A}$ sist. ima rj.

$\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1&\frac{1}{c-a}&-1\\ 0&0&1\\ 0&\frac{1}{c-a}&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1\\ d-a\\ \lambda\end{bmatrix}$ $\lambda\in R$. sist. je neodređen (∞ rj.)

$a\neq d$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1&0&0&\\ 0&c-a&&d-a\\ 0&0&&(d-a)(\dots)\\ -1&-1&&\\ &0&& \end{array}\right]$$

za $d=a$ $\Rightarrow$ rang A = rang $\bar{A}$ = 2 $\Rightarrow$ ima rj.

R_j:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{c-a} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{c-a} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ d-a \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \lambda \in R$$

$d \neq c \;\; \wedge \;\; d \neq a \Rightarrow \text{rang } \bar{A} = 3 \neq \text{rang } A$ protivrj.

II slučaj: $b \neq a$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & 0 & (a-c)(b-c) & (d-a)(d-b) \\ \hline 1 & -1 & -1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

$c=a$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & d-a \\ 0 & a & 0 & (d-a)(d-b) \\ \hline 1 & -1 & -1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

$d=a$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

$\text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2 \Rightarrow$ sist. ima rj.:

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{b-a} & -1 \\ 0 & \frac{1}{b-a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad \lambda \in R$$

$d \neq a$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b-a & 0 & d-a \\ 0 & 0 & 0 & (d-a)(d-b) \\ \hline 1 & -1 & -1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

$d \neq b \Rightarrow \text{rang } \bar{A} = 3 \neq \text{rang } A$

$d = b \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2$

$a \neq c$

$b = c$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & 0 & 0 & (d-a)(d-b) \\ \hline 1 & -1 & -1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 3 \Rightarrow \text{sist. ima jedinstveno rj. (rađi!!)}$$

2) Riješiti i diskutovati sist. jedn. koristeći Kroneker-Kapelijevog stava:

$$\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= a \\ x + by + az &= 1 \end{aligned} \qquad a, b \in R$$

R_j:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & 1 & 1 \\ 1 & ab & 1 & a \\ 1 & b & a & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 1 & ab & 1 & a \\ a & b & 1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & a-1 \\ 0 & b(1-a) & 1-a^2 & 1-a \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & b & a & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(2-a) & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b(a-1) & 1-a & a-1 \\ 0 & 0 & (1-a)(2-a) & 0 \\ \hline 1 & -b & -a & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2-a} & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -\frac{1}{a-1} & -\frac{a}{(1-a)(2-a)} & \\ 0 & 1/b(a-1) & 0 & \\ 0 & 0 & 1/(1-a)(2-a) & \end{array}\right] \overset{(*)}{\sim}$$

1° $a \neq 1 \wedge a \neq 2 \wedge b \neq 0$

$$\overset{*}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & a-1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & \frac{-1}{a-1} & \frac{1}{2-a} & \\ 0 & \frac{1}{b(a-1)} & \frac{-1}{b(1-a)(2-a)} & \\ 0 & 0 & \frac{1}{(1-a)(2-a)} & \end{array}\right] \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 3 - \text{sist. ima jedinstveno rj.}$$

2° $a \neq 1 \wedge a \neq 2 \wedge b = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a & a-1 \neq 0 \\ 0 & 0 & (1-a)(2-a) & 0 \\ \hline 1 & 0 & -a & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \quad \text{rang } A \neq \text{rang } \bar{A} \Rightarrow \text{sist. nema rj.}$$

3° $a = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline 1 & -b & -1 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 1 \quad \infty \text{ rj.}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -b & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \\ \lambda \end{bmatrix} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4° $a = 2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -b & -2 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \Rightarrow \text{rang } A = \text{rang } \bar{A} = 2 \quad \text{sist. ima rj.}$$

$b \neq 0$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -2 & \\ 0 & 1/b & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & -1 & -3 & \\ 0 & 1/b & 1/b & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right]$$

Rj: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1/b & 1/b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{bmatrix} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$b = 0$
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & \\ 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 0 & \\ 0 & 0 & 1 & \\ 0 & 1 & 0 & \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{bmatrix} \quad a \in \mathbb{R}.$$

3.) Odrediti:

a) x_1 i x_2

b) x_1 i x_5

c) x_2 i x_3 i x_4 itd.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 3$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 9$$
$$2x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -16$$
$$3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 2$$
$$x_1 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 + 2x_5 = -12$$

a) 3 det. 5 reda !?!? previše posla

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & -4 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 9 \\ -16 \\ 2 \\ -12 \end{bmatrix}$$

A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, X_1, X_2, Y_1, Y_2

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}$$

$$A_{11}X_1 + A_{12}X_2 = Y_1$$
$$A_{21}X_1 + A_{22}X_2 = Y_2$$

$$|A_{22}| = \begin{vmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \\ -4 & 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad A_{22} \text{ invertibilna matrica}$$

$$A_{22}^{-1} \backslash \; Y_2 - A_{21}X_1 = A_{22}X_2$$

$$A_{22}^{-1}(Y_2 - A_{21}X_1) = X_2$$

$$A_{11}X_1 + A_{12}A_{22}^{-1}(Y_2 - A_{21}X_1) = Y_1$$

$$A_{11}X_1 + A_{12}A_{22}^{-1}Y_2 - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}X_1 = Y_1$$

$$\underbrace{(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})}X_1 = Y_1 - A_{12}A_{22}^{-1}Y_2$$

$$X_1 = \underbrace{(A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})^{-1}}_{2\times 2}\left[Y_1 - A_{12}A_{22}^{-1}Y_2\right]$$

b)
$$x_1 + x_5 + x_2 + x_3 + x_4 = 3$$
$$x_1 + 4x_5 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 9$$
$$2x_1 - 3x_5 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -16$$
$$3x_1 - x_5 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2$$
$$x_1 + 2x_5 + x_2 - 4x_3 + 4x_4 = -12$$

svede se na prethodni slučaj

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_5 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ slučaj pod c) [illegible]

4) Riješiti u zavisnosti od [illegible] kramerovo pravilo

$$ax + y + z = 4$$
$$x + by + z = 3 \qquad a, b, c \in R$$
$$x + y + cz = c$$

$$D=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}=abc+2-a-b-c$$

$$D_x=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & b & 1 \\ c & 1 & c \end{vmatrix}=abc+c+b-2bc-a$$

$$D_y=\begin{vmatrix} a & a & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & c & c \end{vmatrix}=abc+a+c-b-2ac$$

$$D_z=\begin{vmatrix} a & 1 & a \\ 1 & b & b \\ 1 & 1 & c \end{vmatrix}=abc+b+a-2ab-c$$

Diskusija:

$D\neq 0 \Rightarrow abc+2-a-b-c\neq 0$

Sistem ima jedinstveno rješenje dato sa:

$$x=\frac{abc+c+b-2bc-a}{abc+2-a-b-c}$$

$$y=\frac{abc+a+c-b-2ac}{abc+2-a-b-c}$$

$$z=\frac{abc+a+b-2ab-c}{abc+2-a-b-c}$$

Pretp. da je $D=0 \Rightarrow abc+2-a-b-c=0$

$abc+2=a+b+c$

1°

Pretp. $a=b=c=1 \Rightarrow D=0 \Rightarrow$ sistem se svodi na jednu jednačinu $x+y+z=$

$\Rightarrow D=0$ pa je rješenje $x=1-\lambda-\mu$, $y=\lambda$, $z=\mu$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ (rješenje nije jednoznačno određeno)

Pretp. $a\neq 1$, $b=1$

$ac+2=a+1+c$

$ac+1=a+c$

$ac-a+1-c=0$

$a(c-1)-(c-1)=0$

$(a-1)(c-1)=0$

$a\neq 1 \Rightarrow \underline{c=1}$

$a\neq 1$: $a\neq 1$, $b=c=1$; $a=1$, $b\neq 1$, $c\neq 1$

(ili su sva 3 podatka 1 ili $\neq 1$ ili je jedan $\neq 1$ a druga dva $=1$)

2°

$ax+y+z=a$

$x+y+z=1$

$(a-1)x=a-1$

$(a-1)(x-1)=0$

$a\neq 1 \Rightarrow x=1$

$y=\lambda$

$z=-\lambda$, $\lambda\in\mathbb{R}$

3° $a\neq 1$, $b\neq 1$, $c\neq 1$, $D=0$

$D_x=a+b+c-2+c+b-2bc-a-\ldots=2[(b-1)-c(b-1)]=2(b-1)(1-c)$

$b\neq 1$, $c\neq 1 \Rightarrow D_x\neq 0$ [illegible]

Pokazati:

$$h_n = \begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \\ 1/n+1 & 1/n & 1/n-1 & 1/n-2 & \dots & 1/2 \end{vmatrix}$$

Rj:

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \dots$$

$$x = (1 + h_1 x + \dots + h_n x^n)\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots\right)$$

x: $1 = 1$

x^2: $0 = -\frac{1}{2} + h_1$ $\qquad h_1 = \frac{1}{2}$

x^3: $0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}h_1 + h_2$ $\qquad \frac{1}{2}h_1 - h_2 = \frac{1}{3}$

$\vdots$

x^n: $0 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n-1}h_1$ $\qquad \frac{1}{n}h_1 - \frac{1}{n-1}h_2 + \frac{1}{n-2}h_3 + \dots + (-1)^{n-1}h_n = \frac{1}{n+1}$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1/2 & -1 & \dots & 0 \\ 1/3 & -1/2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 1/n & -1/n-1 & \dots & (-1)^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$D_{h_n} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 1/2 \\ 1/2 & -1 & 0 & \dots & 1/3 \\ 1/3 & -1/2 & 1 & \dots & 1/4 \\ \vdots & & & & \\ 1/n & -1/n-1 & 1/n-2 & \dots & 1/n+1 \end{vmatrix}$$

$D = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$

D_{h_n} => vršeći uređenih permutacija kolona

$$D_{h_n} = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1/3 & 1/2 & -1 & \dots & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \\ 1/n+1 & 1/n & 1/n-1 & \dots & (-1)^{n-1}/2 \end{vmatrix} = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - (n+1)} \cdot (-1)^{n-1} \cdot X$$

razmatrati za n parno i n neparno sami!!!

$$h_n = \frac{X(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}{(-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} = X$$

6) Da li postoji det. 12 reda čiji su elementi 1, 0 ili -1, a vrijednost 1997?

$\to 2^{10} = 1024$

1997 = ... = 4 · 1024 ...

$a_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$ ... $i = \overline{1,12}$

konstruišemo ... $D = 1997 \cdot (12 \cdot 12)$ ...

$x_1 = \dots$

$x_2 = \dots$